

Cognitive Analysis and Triangular Modelling of Concepts in Curricular Process

Kognitívna analýza a trojuholníkové modelovanie pojmov v priebehu kurikulárneho procesu

Pavol Tarábek

Didaktis, E-mail: didaktis@t-zones.sk

Kľúčové slová: externý pojmovo-poznatkový systém, interný (mentálny) pojmovo-poznatkový systém, kognitívna analýza pojmov, kognitívne modelovanie pojmovej štruktúry, trojuholníkový model štruktúry pojmu, trojuholníkové modelovanie pojmovej štruktúry, Vygotského štádiá formovania pojmov, komplex, pseudopojem, vývojové úrovne matematických a fyzikálnych pojmov – primitívna úroveň, imaginačná úroveň, empirická úroveň ikonická úroveň, symbolická úroveň, formálna úroveň, vývojové úrovne fyzikálnych pojmovo-poznatkových systémov – primitívne empirická, empirická, parametrická, štruktúrna, formálna

Key words: conceptual knowledge system, mental conceptual knowledge system, cognitive analysis of concept structure, triangle model of concept structure, triangle modeling of concept structure, Vygotian phases of concept formation – complex, pseudoconcept, developmental levels of mathematical and physical concepts – primitive level, imaginative level, empirical level, icon level, symbolical level, formal level, developmental levels of conceptual knowledge systems – primitive empirical, empirical, parametrical, structural, formal level

Abstrakt: Práca predstavuje trojuholníkový model pojmovej štruktúry a jeho vývojové úrovne. Základné komponenty modelu sú: jadro C (slovo, imaginát, symbol), význam M, významové roviny M1, M2, M3, zmysel S a ich vzťahy. Model rozlišuje význam a zmysel ako dve disjunktné množiny. Na tomto modeli je založená kognitívna analýza pojmov. Táto metóda umožňuje kognitívne modelovanie – konštruovanie kognitívnych modelov pojmov a ich mentálnych reprezentácií, ktoré sa nazývajú trojuholníkové modelovanie pojmovej štruktúry. Ďalej práca popisuje vývojové úrovne formovania pojmov v histórii a počas vyučovacieho procesu. Po tretie sú prezentované viaceré trojuholníkové modely Vygotského štádií formovania pojmov na konkrétnych fyzikálnych pojmoch ako aj trojuholníkové modely vývojových úrovní pojmov „sila“ a „číslo“. V závere je ukázané použitie trojuholníkového modelovania pojmov pri vyučovaní ako aj pri vytváraní obsahu vzdelávania.

Abstract: The paper shows a **triangular model of concept structure** and its developmental levels. The basic components of the model are: **core C** (word, representative semantic image, symbol), **meaning M**, **meaning layers M1, M2, M3**, **sense S** and their relationships. The model distinguishes the concept's meaning and sense like two disjunctive sets. Based on this model, a specific method of **cognitive analysis** of concepts has started to develop. This method enables **cognitive modelling** – the construction of cognitive models of single external concepts and their mental representations named as **triangle modeling of concept structure**. Secondly the paper describes the developmental levels of concept formation in the historical development and during the education process. Thirdly the paper presents several triangle models of Vygotian phases of concept formation on concrete physical concepts and triangle models of developmental levels of concepts “force” and “number”. The usage of triangle modelling in learning process and curricular process of curriculum creation is showed.

Obsah

1. Úvod
2. Trojuholníkový model štruktúry pojmu
Jadro, význam a zmysel pojmu
3. Vygotského štádiá formovania pojmov
Popis Vygotského štádií vývoja pojmu pomocou trojuholníkového modelu
Vygotského štádiá formovania pojmu „vodič elektrického prúdu“
4. Vývojové úrovne matematických a fyzikálnych pojmov
Primitívna úroveň pojmov
Imaginačná úroveň pojmov
Symbolická úroveň pojmov
Formálna úroveň pojmov

5. Kognitívna analýza a trojuholníkové modelovanie štruktúry pojmov v kurikulárnom procese – vývojové miskoncepce
Kognitívna analýza a modelovanie pojmu „sila“
Vývoj pojmu „sila“ – prechod z imaginačne–empirickej (aristotelovskej) na symbolickú (newtonovskú) úroveň
Vývoj fyzikálnych pojmov z hľadiska Vygotského štádií
Kognitívna analýza a modelovanie pojmu čísla
Využitie trojuholníkového modelovania pojmu čísla pri tvorbe učiva a vo vyučovaní matematiky
6. Záver
Dodatok 1: Vygotského štádiá formovania pojmov v testoch
Dodatok 2: Citácie k časti „Využitie trojuholníkového modelovania pojmu čísla...“
Literatúra

Content

1. Introduction
2. Triangular model of concept structure
3. Vygotian phases of concept formation
4. Developmental levels of mathematical and physical concepts
5. Cognitive analysis and triangle modelling of concept structure in curricular process – developmental misconceptions
6. Conclusion

1. Úvod – vznik metódy kognitívnej analýzy a syntézy pojmov založenej na trojuholníkovom modelovaní pojmovej štruktúry

Metóda **kognitívnej analýzy** a **syntézy** externých vedeckých/odborných pojmov a ich mentálnych reprezentácií založená na **trojuholníkovom modeli pojmovej štruktúry** a jeho vývojových úrovniach umožňuje konštruovať **modely štruktúry** externých aj interných pojmov ako prvkov externých a interných pojmov poznatkových systémov *1. Metóda bola predbežne nazvaná **trojuholníkové modelovanie** pojmov a sa účinne dá používať ako jedna z metód didaktickej transformácie DT2 (resp. kurikulárnej transformácie CT2) v priebehu didaktickej komunikácie pri vytváraní didaktického systému, resp. zamýšľaného kurikula. Je nutná pri kognitívnej analýze pojmov v procese ich adaptácie na kognitívnu úroveň edukanta. Okrem toho spolu s testami kognitívnej štruktúry pojmov a poznatkov sa dá používať v priebehu edukačného procesu na zisťovanie vstupných pojmových úrovní u edukantov pred zvolenou etapou vzdelávania. Podobným spôsobom sa dá používať na zisťovanie úrovne osvojených pojmov ako súčasti výstupov edukácie vo fáze F4 didaktickej komunikácie – implementované kurikulum.

Model pojmovej štruktúry sa ukázal ako vhodná pracovná hypotéza pri štúdiu fyzikálnych miskonceptí *2. Žiacke a študentské fyzikálne miskoncepce sa skúmajú už dva a pol desaťročia (Hestenes at al., 1992, Nachtigall, 1981, Hejnová, 1984, Renström at al., 1990, Sharma, 2007, Tarábek, 1985, 1988, 1989, 2002, popis a príklady miskonceptí ako aj detailnejší prehľad pozri v práci Adamčíková, 2007, Dodatok 2). Príčiny miskonceptí boli analyzované a vysvetľované rozličnými spôsobmi. Zistilo sa, že na vytváraní miskonceptí sa podieľajú učebnice, nekorektné a neúplné formovanie pojmov, nesprávne postupy školskej edukácie zdôrazňujúce formálne vedomosti (Fenclová 1980, Tarábek, 1985, Brockmeyerová, Tarábek, 2007, Sharma, 2007, Adamčíková, Tarábek, 2007). Autorove štúdie miskonceptí vyústili do modelu pojmovej štruktúry (Tarábek, 1988), ktorý sa ukázal účinným pri analýze pojmov a poznatkov edukantov. Tento model bol postupne dotváraný do súčasnej podoby, ktorá sa nazýva **trojuholníkový model pojmovej štruktúry**. Model nadväzuje na Vygotského teóriu pojmu (Vygotskij, 1986) a okrem popisu vývoja spontánnych pojmov rozlišuje viaceré štádiá vývoja vedeckých pojmov u žiakov pri vyučovaní fyziky a matematiky. Model dôsledne rozlišuje význam a zmysel pojmu ako dve disjunktné množiny, vychádzajúc z Fregeho myšlienky významu – Bedeutung a zmyslu – Sinn (Frege, 1892). Model vychádza z idey sémantického/semiotického trojuholníka.

Metóda **kognitívnej analýzy** a **syntézy** externých a interných pojmov založená na **trojuholníkovom modeli pojmovej štruktúry** a jeho vývojových úrovniach sa v zjednodušenej podobe používala pri analýze fyzikálnych miskonceptí (Tarábek, 1985, 1988, 2005). Od roku 2000 sa používala aj pri vytváraní pojmových tabuliek (knowledge charts) v posteroch, učebniciach a sprievodcoch učivom (Adamčíková, Tarábek, 2000, Tarábek 2004, 2006, Tarábeková, 2007). V priebehu rozvíjania a štruktúrneho dotvárania koncepcie didaktickej komunikácie fyziky sa ukázala účinným nástrojom pri vytváraní didaktického systému – zamýšľaného kurikula. Okrem toho sa dá účinne využívať v priebehu edukačného procesu pri zisťovaní, aké sú mentálne reprezentácie pojmov poznatkových systémov edukantov, ktoré sa môžu značne odlišovať od vedomostí zisťovaných bežnými evaluačnými nástrojmi (Adamčíková, Tarábek, 2007).

*1 **Externé a interné pojmo-poznatkové systémy, externé a interné pojmy/poznatky** (podrobnejší popis v Tarábek, 2007b)

Externé pojmo-poznatkové systémy (EPPS) sú tvorené externými pojmami a poznatkami, ktoré sú výsledkom spoločenského poznávacieho procesu (napr. v rámci vedeckého výskumu, odbornej činnosti, empirického poznávania), t.j. poznávacieho procesu ľudského spoločenstva ako súhrnu poznávacích subjektov, pričom treba rozlišovať o aký súhrn poznávacích subjektov sa jedná. **Externý pojem** je kognitívny útvar, ktorý je základnou jednotkou symbolického poznania. Pojmy možno organizovať do kategórií a do schém, ktoré sa líšia formou používania a mierou abstrakcie a zahrňujú informácie o vzťahoch medzi pojmami, atribúty, kontexty atď. Každý pojem je prepojený rozličnými vzťahmi k iným pojmom v pojmovom systéme, ako aj vzťahmi k entitám a kategóriám v skutočnom svete. **Externý poznatok** je kognitívny informačný útvar, ktorý je reprodukciou zákonitostí, princípov a pravidelnosti javov okolitého sveta – vyjadruje určitú informáciu o zákonitosti reality. Externý poznatok je vyjadrený kognitívnymi väzbami medzi pojmami resp. symbolmi, ktoré označujú pojmy.

Vedecké externé pojmo-poznatkové systémy sú výsledkom poznávacieho procesu spoločenstva vedcov v danej vednej disciplíne. Sú tvorené systémom vedeckých pojmov, vedeckých faktov, zákonov, princípov a teórií, ich aplikácií a interpretácií, ďalej systémom operatívnych/procedurálnych poznatkov – poznávacích, modelovacích, aplikačných a interpretačných metód a postupov, ktoré daná vedná/odborná disciplína používa. Nedeliteľnou súčasťou externých pojmo-poznatkových systémov je vedecký obraz sveta (z pohľadu príslušnej vednej disciplíny), ktorý je systémom obecných predstáv o realite konzistentne spojený s vedeckými poznatkami a formulovaný obvykle v prirodzenom jazyku rozšírenom o vedecké pojmy. Súčasťou EPPS sú aj tie pojmy prirodzeného jazyka, ktoré vedci/odborníci používajú pri prezentácii vedeckých výsledkov ľuďom, ktorí nie sú v danom odbore odborníkmi.

Pri analýze historického vývoja externých poznatkových systémov boli rozlíšené viaceré vývojové úrovne EPPS a to:

- vo fyzike úroveň primitívne-empirická, empirická, parametrická, štruktúrna a formalizačná (Tarábek 1988, 2002, 2003, 2006);
- v matematike úroveň empirická (obrazová), imaginačná/ikonická, symbolická a formálna (Tarábek 2006, 2007a).

Pri analýze modelov IPPS a ich overovaní na žiakoch a študentoch boli zistené prvky niektorých úrovní EPPS v rámci kognitívneho vývoja, napr.:

- prvky úrovne primitívne-empirickej, empirickej, parametrickej pri štúdiu interných fyzikálnych pojmov a poznatkov u žiakov základnej a strednej školy (Tarábek 2002, 2003);
- prvky úrovne empirickej (obrazovej), imaginačnej (ikonickej) a nástup úrovne symbolickej pri štúdiu matematických pojmov a poznatkov u detí predškolského veku a žiakov základnej školy (Tarábek 2007a).

Interný pojmo-poznatkový systém (IPPS) resp. **mentálny pojmo-poznatkový systém** je tvorený **internými pojmami** a **internými poznatkami**, ktoré sú mentálnymi reprezentáciami externých pojmov a poznatkov a sú produktom individuálneho poznávacieho procesu človeka, či už v rámci vlastného poznávania založeného na skúsenosti a myslení, alebo v procese učenia, rovnako aj v pracovnej činnosti. IPPS je systém pojmov a poznatkov, ktoré si poznávací subjekt (cognitívny agent) vytvára resp. získava v procese výchovy, vzdelávania, vlastnou observačnou činnosťou (pozorovaním), prostredníctvom empirickej skúsenosti, ako aj cieľavedomým experimentovaním a vlastným myslením v procese vedeckého poznávania. Pod poznatky zaraďujeme aj vedomosti, ktoré sú súčasťou systému, t.j. sú prepojené na ostatné prvky IPPS, teoretické i praktické znalosti a to nielen deklaratívne ale aj operačné/procedurálne. Interné pojmy a poznatky majú svoju vlastnú štruktúru, ktorú možno skúmať a modelovať (Tarábek, 2004, 2005, 2006, 2007b).

Interné pojmo-poznatkové systémy sú tvorené prvkami a reláciami resp. väzbami medzi prvkami. Elementárnymi prvkami IPPS sú pojmy na rôznej abstrakčnej úrovni a na rôznych úrovniach vytvárania, ďalej sú to slová, matematické, fyzikálne a iné symboly, predstavy na rôznej úrovni abstrakcie, ako aj elementárne znaky jednotlivých predstáv – vnemov uchovávaných v pamäti. Väzby medzi prvkami IPPS sú rozličných typov, ich množina je oveľa bohatšia než množina prvkov (Tarábek 1988, 2004, 2005). Väzby na elementárnych prvkoch vytvárajú prvky vyššieho rádu – rôzne kontextuálne spojenia medzi slovami prirodzeného jazyka, gramatiky, skúsenosti, empirické a teoretické zákony, pravidlá, matematické vety, logické väzby medzi axiómami, zákonmi a princípmi vedeckej teórie, včítane väzieb umožňujúcich interpretáciu teórie do reality, funkčné väzby medzi prvkami myšlienkových modelov technických systémov a pod.

Interný pojmo-poznatkový systém je teda dvojica $[M, Re]$, kde M je množina všetkých prvkov IPPS a Re je množina relácií na M (Pülpán 1981, Tarábek 1988).

*2 Zistilo sa, že žiaci a študenti majú už pre začiatkom vyučovania fyziky vytvorené určité prekonceptie (prvotné „predvedecké“ názory a empirické poznatky). Sú získané obvykle vlastným poznávaním založeným na pozorovaní reality, a preto sú niekedy nesprávne. V škole potom získavajú nielen formálne znalosti, ale vytvárajú si aj svoje vlastné nesprávne názory, vedomosti, neúplné a nesprávne pojmy – tzv. miskonceptie, alternatívne študentské rámce, predvedecké konceptie atď. Mareš to nazýva žiackym či študentským pojatím učiva (Čáp, Mareš, 2001). Problém, na ktorý mnohí autori upozorňujú, spočíva v tom, mnohé prekonceptie a miskonceptie sú v myslení žiakov a študentov hlboko zakorenené, na vytváraní miskonceptii sa podieľa aj škola a pretrvávajú až do dospelosti. Podieľajú sa na tom svojou chybovosťou učebnice, nesprávne nastavené osnovy zaraďujúce do učiva pojmy presahujúce kognitívnu úroveň žiaka, formálne vedené vyučovanie.

2. Trojuholníkový model štruktúry pojmu

Trojuholníkový model štruktúry pojmu bol vytvorený v nadväznosti na Vygotského koncepciu štruktúry pojmov (Vygotsky 1970, 2004) vyjadrenú napr. vetou: „*To think of some object with the help of a concept means to include the given object in a complex system of mediating connection and relations disclosed in determinations of the concept.*” (Rieber, Robinson, 2004, The Essential Vygotsky). Ďalej model vychádzal z koncepcie sémantického modelovania pojmov a poznatkov (Půlpán, 1988, Tarábek 1985, 1988, 1989) a sémantických sietí (Linhart, 1976, Sternberg, 2002). V ďalšej etape práce boli rozpoznané a špecifikované úrovne vývoja matematických a fyzikálnych pojmov (pozri obr. 3). Model bol prvýkrát publikovaný v roku 1988 ako model pojmovej štruktúry (Tarábek, 1988). Pod názvom trojuholníkový model pojmovej štruktúry bol publikovaný v prácach (Tarábek, 2005, 2006, 2007b). Model publikovaný v práci (Tarábek, 2007b) bol vzhľadom na niektoré nedostatky prepracovaný, doplnený a v tomto článku je prezentovaný v jeho súčasnej podobe.

Základné prvky modelu sú: **jadro C** (core), **význam M** (meaning) a **zmysel S** (sense), ako aj ich vzájomné prepojenia a hierarchické úrovne M1, M2, M3 **významových rovín**.

Jadro pojmu

Jadro pojmu je zložené z troch navzájom prepojených prvkov: **slovo**, **symbol**, **sémantický imaginálny reprezentant**. Sémantický imaginálny reprezentant (RSI – representative semantic image) – **imaginát** – je dominantná predstava, ktorá sa vynorí v mysli pri vyslovení príslušného slova alebo pri myšlienkovej operácii, ktorá používa príslušný pojem, slovo, symbol. Teda ako mentálna reprezentácia objektov, dejov, javov a entít v jadre pojmu pozostáva z troch komponentov: slova, analógového komponentu – RSI a symbolického komponentu – symbolu. RSI je obrazový prototyp, ktorý obsahuje všetky podstatné črty charakterizujúce triedu denotátov daného pojmu.

V mnohých prípadoch sa vytvára aj obrazová forma sémantického imaginálneho reprezentanta, pre ktorú sa obvykle používa termín **sémantický ikonický reprezentant** – **ikon**. Často sa ikon formalizuje a používa sa v bežnej komunikácii všade tam, kde je potrebné stručné názorné vyjadrenie bez použitia textu – na letiskách, staniciach, v počítačovom softvéri atď.

Význam pojmu

Význam pojmu (pozri obr. 1) je tvorený množinou všetkých podradených pojmov a predstáv, ktoré sa k príslušnému pojmu vzťahujú a väzbami na tieto pojmy a predstavy.

Významová rovina M1

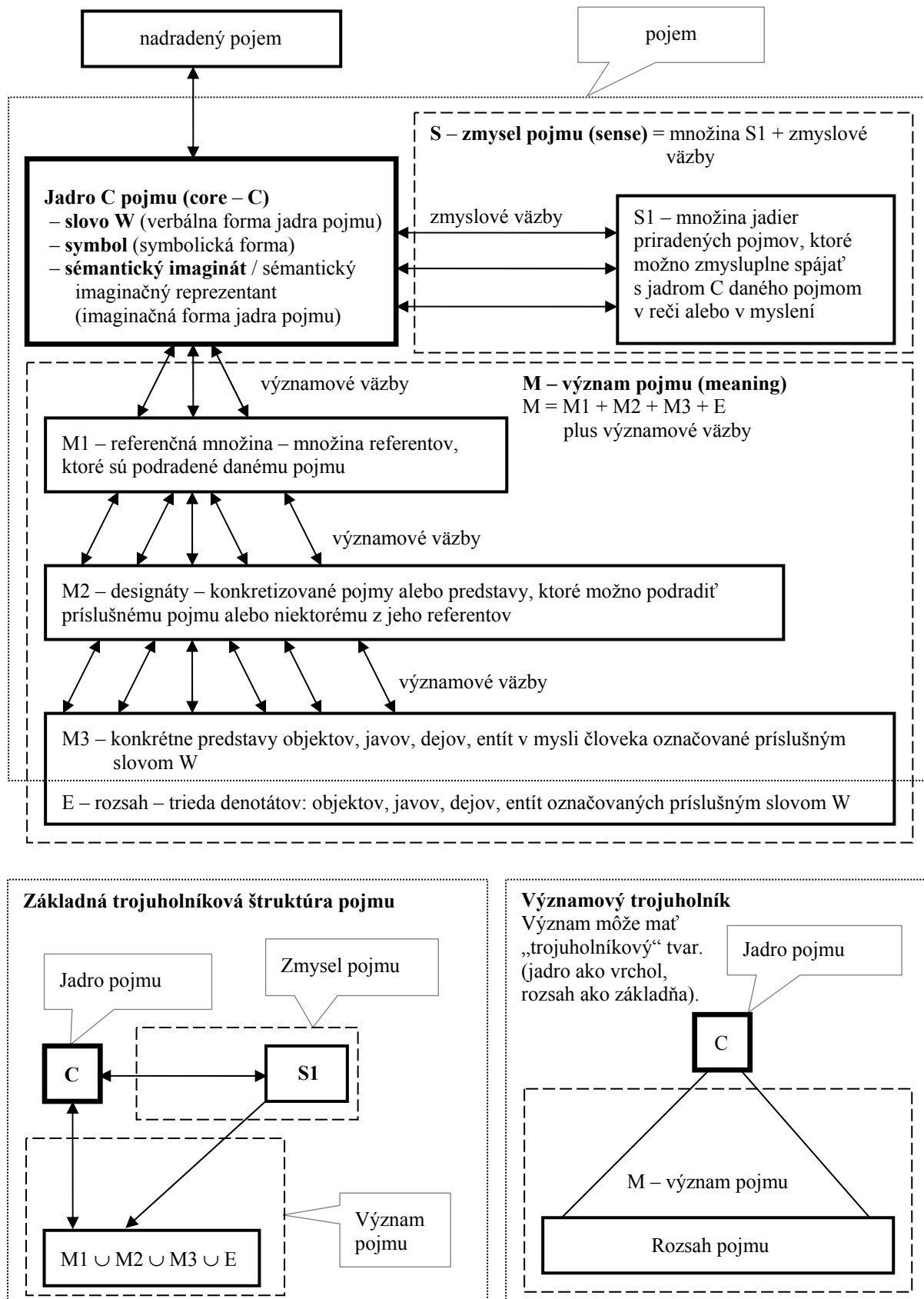
Medzi podradené pojmy môžu patriť **referenty**. Sú to pojmy, ku ktorým príslušný pojem „referuje“ a umožňuje diferenciaciu celej triedy denotátov pojmu (t. j. objektov, dejov, kvalít a entít v realite, na ktoré sa príslušný pojem vzťahuje) na disjunktné podtriedy. Napr. triedou referentov pojmu „sila“ je súbor pojmov „gravitačná sila“, „elektromagnetické sily“, „jadrové sily“ a „slabé interakcie“. Treba však zdôrazniť, že v IPPS popri jednej triede referentov môžu existovať aj ďalšie, ktoré diferencujú triedu denotátov iným spôsobom. Napr. v klasickej mechanike sa sily rozlišovali na skutočné a zdanlivé. Skutočné sily boli gravitačné, elektrické a magnetické – t. j. sily pôsobiace na diaľku a sily pôsobiace pri dotyku telies. Zdanlivé sily boli napr. „zotrvačná sila“ alebo Coriolisova sila. Teda trieda referentov vyzerala v minulosti inak. Termíny „sily pôsobiace na diaľku“, „sily pôsobiace pri dotyku telies“ a „zdanlivé sily“ sa však používajú aj v súčasnosti (v rôznych verbálnych formách) pri analýze úloh aplikačného charakteru, v technických disciplínach a vo vyučovacom procese.

Môžeme teda hovoriť o viacerých triedach referentov, ktoré v podstate reprezentujú rôzne príbuzné významy príslušného pojmu. Ak v internom pojmovo-poznatkovom systéme existujú k danému slovu viaceré príbuzné triedy referentov, hovoríme o **významovom poli** príslušného pojmu. Treba zdôrazniť, že termín „významové pole“ sa nevzťahuje na homonymitu, t. j. situáciu, ak príslušné slovo má viac nepríbuzných významov (napr. slovo „matka“ znamená matku človeka, ale aj maticu skrutky).

Významová rovina M1 môže mať aj viac podrovín. Napr. pojem „zariadenie bytu“ má referenty „nábytok“, „sanita“, „textílie“, „podlahoviny“ atď. Pojem „nábytok“ má referenty „kuchynský nábytok“, „nábytok do spálne“, „nábytok do obývačky“ atď.

Obr. 1: Trojuholníkový model štruktúry pojmu

Pravouhlé obdĺžniky (boxy) znázorňujú komponenty pojmovej štruktúry (C – jadro, S1, M1, M2, M3, rozsah); čiarkované obdĺžniky znázorňujú subsystemy (význam a zmysel), bodkované obdĺžniky znázorňujú pojmy, šípky znázorňujú väzby medzi prvkami pojmovej štruktúry.



Významová rovina M2

Designáty sú konkretizované pojmy alebo predstavy, ktoré možno podradiť príslušnému pojmu, alebo niektorému z jeho referentov. Tieto pojmy môžu mať rozličnú úroveň abstrakcie resp. konkretizácie od pojmov relatívne abstraktných podradených priamo referentom až po pojmy vyjadrujúce priamo konkrétne objekty, javy, vlastnosti a pod. Napr. referentu „elektrostatická sila“ možno podradiť príťažlivé a odpudivé elektrické sily a tieto môžeme ďalej diferencovať na rôzne konkrétne sily prejavujúce sa v reálnych situáciách, môžeme rozlišovať ich rôzne veľkosti, smery resp. pôsobiská. Inému referentu „sila pôsobiaca pri dotyku telies“ možno podradiť sily trecie, ťahové, tlakové, väzbové a pod. a tieto opäť možno ďalej diferencovať na sily prejavujúce sa v konkrétnych situáciách. Designáty, ktoré sú pojmi, majú kompletnú formálnu stránku, t. j. slová, symboly a imagináty včítane väzieb medzi nimi. Medzi designáty patria však aj tie predstavy, ktoré subjekt nepomenováva slovom a obvykle odrážajú určitou zovšeobecnenou formou konkrétne vnemy. Môže sa však jednať aj o abstraktné predstavy, s ktorými subjekt manipuluje v procese poznávania a tvorivého hľadania poznatkov.

Významová rovina M3

Denotáty sú objekty, javy, deje, entity či vzťahy, ktoré sú príslušným slovom označované, resp. reprezentované príslušným pojmom v internom pojmo-vo-poznatkovom systéme. Napr. triedou denotátov pojmu „teleso“ sú všetky telesá v realite. Triedou denotátov pojmu „mikročastica“ v kvantovej mechanike sú všetky kvantové objekty (napr. elementárne častice), ktoré sú dostatočne malé na to, aby sa chovali podľa zákonov kvantovej mechaniky. Triedou denotátov pojmu „sila“ sú všetky pôsobiace sily v prírode. Denotátmi sú nielen objekty, deje, javy v prírode (ktorej súčasťou je aj človek), ale aj prvky interných pojmo-vo-poznatkových systémov, ktoré označujeme slovami. Sú to konštrukty ľudskej mysle a obecne ich nazývame entity, množiny, relácie atď.

Ak denotáty môžeme vnímať (napr. hviezdy, rôzne telesá, kvapaliny a pod.) hovoríme o **denotátoch evidentných**. Okrem nich existujú denotáty registrovatelné pomocou fyzikálneho merania, ktoré nemusia byť evidentné, napr. mikročastice, sily, energia a pod. Niektoré fyzikálne pojmy, ktoré sú idealizovanými konštrukciami, nemajú reálne denotáty. Takýmito pojmi sú napríklad hmotný bod, ideálny plyn, ideálne tuhé teleso a pod. V tomto prípade možno hovoriť o **imaginárnych denotátoch**, pričom v realite existujú reálne objekty, ktoré sa len málo líšia od našich predstáv idealizovaných objektov.

Významové väzby sú väzby:

- medzi jadrom príslušného pojmu a jadrami referentov,
- medzi jadrom príslušného pojmu a jadrami designátov,
- medzi jadrami referentov a jadrami designátov,
- V IPPS človeka sú denotáty zastúpené konkrétnymi predstavami, potom k významovým väzbám môžeme priradiť aj väzby triede denotátov.

Trieda všetkých denotátov tvorí **rozsah** (extenziu) príslušného pojmu.

Zmysel pojmu

Žiaden pojem nie je v internom pojmo-vo-poznatkovom systéme (IPPS) izolovaný. Je spojený veľkým počtom väzieb s ostatnými prvkami IPPS. Všetky väzby, ktorými je príslušný pojem, resp. jeho jadro spojené s ostatnými pojmi IPPS (okrem väzieb na pojmy podradené), tvoria spolu s množinou S1 (pozri obr. 1) jeho zmysel.

Zmysel pojmu je tvorený množinou priradených pojmov S1 a zmyslových väzieb jadra pojmu na priradené pojmy (obr. 1). **Zmyslové väzby** môžeme deliť na:

1. kvalitatívne väzby – aktuálne, potenciálne
2. atributívne väzby,
3. kognitívne väzby,
4. operacionálne väzby,
5. kontextuálne väzby.

1. **Kvalitatívne väzby** sú väzby na pojmy vyjadrujúce aktuálne kvality (resp. vlastnosti), potenciálne kvality a atribúty daného pojmu – podstatné vlastnosti.

Aktuálne kvality sú konkrétne vlastnosti charakterizujúce triedu denotátov (objektov, dejov, javov, entít, ktoré príslušný pojem charakterizuje). Aktuálnou vlastnosťou červeného jablka je jeho červená farba. Aktuálnou vlastnosťou sily je skutočnosť, že je vektorová fyzikálna veličina.

Potenciálne kvality sú vlastnosti charakterizujúce denotáty podradených pojmov – referentov resp. designátov. Pripojenie potenciálnych kvalít k danému pojmu spôsobí jeho diferenciáciu na pojmy podradené. Napr. pripojením potenciálnych kvalít „pohyb“ a „pokoj“ k pojmu „teleso“ dostaneme dve disjunktné triedy denotátov reprezentované pojmi „pohybujúce sa telesá“ a „telesá v pokoji“. Potenciálne kvality, ktoré je možné pripojiť

k pojmu „sila“, sú „gravitačná“, „elektromagnetická“, „jadrová“ a kvalita vyjadrená termínom „slabé interakcie“. Tým sa rozdieluje obecný pojem sily na referenty (ktoré sú potom plne vybudovanými pojmami). Ak uvažujeme inú významovú štruktúru, môžeme pojem sily rozdielovať na podradené pojmy pripojením kvalít „zdanlivá“ a „skutočná“. Potenciálne kvality príslušného pojmu sú súčasne aktuálne kvality podradených pojmov, ku ktorým sú pripojené. Väzby jadra pojmu na potenciálne kvality však nemožno stotožňovať s významovými väzbami príslušného pojmu priamo na podradené pojmy – referenty. Poznávaci subjekt môže totiž rozlišovať rôzne referenty príslušného pojmu podľa konkrétnych znakov, môže dokonca používať slová vyjadrujúce príslušné kvality spolu so slovom vyjadrujúcim príslušný pojem, ale nemusí mať ešte dobre vybudované pojmy týchto kvalít. Napr. podľa (Tarábek, 2005) žiaci 6. ročníka základnej školy majú vybudované pojmy „gravitačná, elektrická a magnetická“ (sila) na konkrétnej úrovni, avšak tieto sily rozlišujú iba na základe určitých konkrétnych znakov. Napr. magnetická sila je sila, ktorou pôsobí magnet na železné predmety, elektrická sila sa prejavuje po zelektrizovaní niektorých predmetov priťahovaním papierikov, vlákien, vlasov a pod., gravitačná sila sa prejavuje tým, že závažie natiahne pružinu silomeru. Žiaci majú obvykle kvalitu „magnetický“, „elektrický“, „gravitačný“ spojenú tak tesne s pojmom sila, že tieto kvality zrejme ešte nie sú v myslení žiaka osamostatnené. K osamostatneniu týchto kvalít prispieva budovanie pojmu „elektrické, magnetické, gravitačné pole“ ako (silové) pole, ktoré sprostredkovo silové pôsobenie. Ako ukázala práca (Tarábek, 2005), takto vybudovaný pojem magnetického poľa má iba okolo 40% študentov gymnázia (prakticky nezávisle na ročníku). Ostatní pokladajú magnetické pole (nanajvýš) za priestor okolo magnetu.

2. **Atributívne väzby** sú kvalitatívne zmyslové väzby na pojmy vyjadrujúce atribúty daného pojmu. Atribúty daného pojmu sú tie aktuálne kvality, ktoré vyjadrujú podstatné vlastnosti charakterizujúce triedu denotátov (objektov, dejov, javov, ktoré príslušný pojem označuje). Podľa týchto vlastností sme schopní pozorovaný objekt, dej, jav zaradiť do triedy denotátov tvoriacich rozsah príslušného pojmu. Napr. atribútom pojmu „teleso“ je jeho hmotnosť. Atribúty pojmu „pevné teleso“ sú stály objem, stály tvar a hmotnosť. Atribúty pojmu „kvapalina“ sú stály objem a nestály tvar. Atribútom sily je skutočnosť, že vyjadruje pôsobenie medzi fyzikálnymi objektmi (t.j. medzi telesami, resp. medzi telesom a poľom). Atribútom jablka je skutočnosť, že je plodom jablonie; atribútom ihličnatého stromu je ihličie, atribútom listnatého stromu sú listy. Atribúty sa vyskytujú v definíciách, v ktorých sa používa nadradený pojem, napr. „Teleso je hmotný fyzikálny objekt.“, kde „fyzikálny objekt“ je nadradený objem, „hmotnosť“ je atribút. „Pevné teleso je (hmotný) fyzikálny objekt, ktorého objem a tvar sú stále. Kvapalina je fyzikálny objekt, ktorého objem je stály a tvar sa môže meniť.“
3. **Kognitívne väzby** sú väzby medzi jadrom príslušného pojmu a pojmami, ktoré vystupujú vo fyzikálnych resp. prírodných zákonoch (pravidielach, princípoch) spolu s príslušným pojmom. Ak napr. uvažujeme II. Newtonov zákon v tvare: $F = m \cdot a$, potom má žiak vytvorenú **kognitívnu väzbu** pojmu „sila“ na pojem „zrýchlenie“ vtedy, ak si uvedomuje, že „sila spôsobí zmenu pohybového stavu“, t. j. v konkrétnom myslení žiaka je tento poznatok v tvare: „sila spôsobí zrýchlenie, spomalenia pohybu telesa resp. zakrivenie dráhy“. Takáto kognitívna väzba bola napr. zistená iba u 23 – 32% žiakov základnej školy a gymnázia (počínajúc 7. ročníkom ZŠ), pričom závislosť na veku respondentov je nevýrazná (Tarábek, 2005). Pritom sa ukázalo, že ak aj študent pozná II. Newtonov zákon, dokonca vie počítať pomocou neho príklady, nemusí si ešte uvedomovať väzbu „sila spôsobí zrýchlenie, spomalenia pohybu telesa resp. zakrivenie dráhy“. Napr. približne polovica študentov 4. ročníka gymnázia pozná II. Newtonov zákon, asi 30% ho vie aplikovať pri riešení fyzikálnej úlohy, avšak len tretina z tých, čo vedia aplikovať II. Newtonov zákon, vie že „sila vyvoláva zmenu pohybového stavu (t. j. zrýchlenie, spomalenie, zakrivenie dráhy)“. Podobne sa ukázalo, že znalosť Ohmovho zákona: $I = U/R$ i znalosť jeho aplikácie na konkrétne úlohy ešte neznamená, že žiaci si uvedomujú **kognitívnu väzbu** nepriamej úmernosti medzi prúdom a odporom $I \sim 1/R$. Podobne sa ukázalo, že žiaci 7. ročníka ZŠ poznajú „vzorec“ pre výpočet obvodu kruhu $O = 2\pi R$ a vedia obvod kruhu vypočítať, avšak len malá časť z nich (asi 16%) si uvedomuje, že obvod kruhu je 2π -krát väčší než jeho polomer (Tarábek, 1988).
4. **Operacionálne väzby** sú väzby medzi jadrom príslušného pojmu a pojmami, ktoré spolu s ním vystupujú vo fyzikálnych definíciách. Tieto väzby sú vyjadrené tzv. operacionálnymi definíciami resp. operacionálnymi priradeniami (Tarábek, 1988). Máme na mysli iba tie operacionálne priradenia, ktoré sú realizované myšlienkovými operáciami, teda nie operáciami inštrumentálnymi, resp. ich sekvenciami vedúcimi na experimenty a merania. Operacionálne väzby existujú v mysli žiaka či študenta, ak vie „čítať“ definície, resp. operacionálne priradenia. Napr. ak študent vie „čítať“ definíciu: $s = v \cdot t$ (dráha sa rovná súčinu rovnomernej rýchlosti a času), v štruktúre jeho pojmu „dráha“ existujú väzby: $s \sim v$ (dráha rovnomerného pohybu je úmerná rýchlosti pohybu) a $s \sim t$ (dráha rovnomerného pohybu je úmerná dĺžke časového intervalu). Ak študent vie čítať definíciu $a = dv/dt$ (zrýchlenie je deriváciou rýchlosti podľa času), uvedomuje si, že „zrýchlenie je priamo úmerné diferenciálnej zmene rýchlosti“ a „nepriamo úmerné diferenciálnej zmene času“.
5. **Kontextuálne väzby** sú súvislosti medzi jadrom príslušného pojmu a všetkými ostatnými pojmami, ktoré možno s príslušným pojmom zmysluplne spájať vo výpovediach, pričom týmto termínom neoznačujeme väzby kvalitatívne, atributívne, kognitívne a operacionálne. Pojem „sila“ možno zmysluplne spájať vo vetách napr.

s pojmami „pohyb“, „pôsobenie“, „pole“, „priestor“, „čas“, a pod. Kontextuálne väzby medzi pojmami sa uplatňujú pri radení slov vo vetách pri zmysluplných výpovediach. Je zrejme, že výpoveď „Auto má zelené listy.“ je nezmyselná, pretože medzi pojmami „auto“ a „listy“ nie je kontextuálna väzba. Kontextuálne väzby umožňujú človeku tvoriť predikáty – slovné výpovede týkajúce sa vlastností, zákonitostí, definičných priradení i výpovede týkajúce sa významových väzieb príslušného pojmu nadol i väzieb smerom nahor na pojem nadradený. Súčasťou kontextuálnych väzieb sú aj väzby gramatické.

3. Vygotského štádia formovania pojmov

Vygotský (1986) rozlišuje tri hlavné štádia vytvárania spontánnych pojmov vedúce k plne formovanému pojmu: synkret (heap), komplex (complex), pseudopojem. Štádium komplexu má viaceré varianty: association, collection, chain complex, diffuse complex. Do štádia komplexu Vygotský zahrňuje aj pseudopojem, v tejto práci tento termín budeme chápať ako zvláštnu etapu formovania pojmu.

Popis Vygotského štádií vývoja pojmu pomocou trojuholníkového modelu

V prácach, v ktorých bola použitá prvá verzia modelu pojmovej štruktúry (Tarábek, 1988), sa zistilo, že aj vývoj vedeckých pojmov v myšliach študentov v priebehu vyučovacieho procesu môže prechádzať štádiami komplexu a pseudopojmu, kým dospeje do štádia plne formovaného pojmu (Gregušová, 1986, Tarábková, 1988, Mlčúchová, 1988).

V prácach (Mlčúchová, 1988, Tarábek, 1988) boli rozlíšené štádia komplexu, pseudopojmu a pojmu u žiakov 8.ročníka ZŠ až študentov 4. ročníka gymnázia u pojmu „vodič elektrického prúdu“ Otázka znela: „Čím všetkým môže pretekať elektrický prúd?“ Výsledky sú prezentované v tabuľke 1.

Stĺpec 1 uvádza počet respondentov danej vekovej skupiny. Stĺpec 2 uvádza percentuálny podiel nulových alebo nesprávnych odpovedí.

Stĺpec 3 ukazuje percentuálny podiel odpovedí na úrovni **komplexu**, ktoré uvádzali správne príklady vodičov (meď, žiarovka, kovy, elektrolyty, voda a pod.) a spolu s nimi niekedy (nie u všetkých respondentov) aj nesprávne príklady (signál, zvuk, svetlo).

Stĺpec 4 ukazuje percentuálny podiel odpovedí na úrovni **pseudopojmu**, ktoré uvádzali správne príklady na úrovni referentov (kovy, elektrolyty, ionizované plyny) niekedy doplnené aj designátmi – ako príkladmi na jednotlivé referenty (napr. kov – meď, železo; elektrolyt – kyselina v akumulátore).

Stĺpec 5 ukazuje percentuálny podiel odpovedí na úrovni **pojmu**, ktoré boli charakterizované definíciami, napr. „Elektrický prúd prechádza všetkými látkami, ktoré obsahujú voľné nabité častice.“, „Elektrický prúd prechádza všetkými látkami, ktoré obsahujú voľné elektróny.“ a pod., pričom niektorí študenti odpoveď doplnili aj konkrétnymi príkladmi elektrických vodičov na úrovni referentov, designátov aj denotátov.

stĺpec	1	2	3	4	5
vek respondentov	počet resp.	nulová/nezmyselná odpoveď	odpoveď na úrovni komplexu	odpoveď na úrovni pseudopojmu	odpoveď na úrovni pojmu
žiaci 8. ročníka ZŠ	315	6,3 %	61,9 %	28,9 %	2,9 %
študenti 1. ročníka gymnázia	200	3,0 %	55,5 %	33,5 %	8,0 %
študenti 3. ročníka gymnázia	218	0,4 %	36,1 %	55,0 %	10,5 %
študenti 4. ročníka gymnázia	200	4,0 %	25,0 %	59,0 %	12,0 %

V prácach (Gregušová, 1986, Mlčúchová, 1988, Tarábková, 1986) bol skúmaný vývoj pojmov „vodič elektrického prúdu“, „elektrický prúd“, „elektrické napätie“, „elektrické pole“, „magnetické pole“ a „sila“ v priebehu 6. až 8. ročníka ZŠ a 1. až 4. ročníka gymnázia. Na základe kognitívnej analýzy týchto pojmov pomocou trojuholníkového modelu a v náväznosti na prácu (Vygotský, 1986) boli rozlíšené tieto štyri štádia neúplného pojmu predchádzajúce plne vybudovaný pojem:

1. **Nižší komplex** je charakterizovaný slovným jadrom, ktoré obsahuje iba slovo – názov pojmu. Významová rovina M3 môže mať o niečo väčší počet prvkov než M2, t.j. ku každému designátu je priradený iba jeden denotát a niektoré predstavy denotátov sú pripojené priamo na jadro – subjekt pre niektoré predstavy nemá meno. Môže to byť aj naopak – k niektorým designátom si subjekt nemusí vybaviť predstavu. Počet prvkov M2 je

veľmi nízky (často iba jeden, dva). Okrem správnych designátov a predstáv denotátov sú vo význame zaradené veľmi často aj nesprávne. Kontextuálne väzby obvykle chýbajú.

2. **Vyšší komplex** charakterizovaný jadrom, ktoré okrem slova obsahuje aj imaginatívny reprezentant – obrazový prototyp s črtami charakterizujúcimi triedu denotátov. Imaginát nemusí byť úplný a môže obsahovať aj nesprávne črty. Významová rovina M3 obsahuje viac prvkov než M2, t.j. k jednému designátu je už pripojených viac predstáv denotátov. Medzi designáty sú zaradené aj pojmy, ktoré sa neskoršie môžu stať referentmi, teda žiak ešte nerozlišuje pojmy na rôznych hierarchických úrovniach. Kontextuálne väzby sú už vybudované, takže žiak vie popísať vetami pripojenie vodiča k zdroju, žiarovke a pod. Žiadne zo štádií komplexu nemá nadradený pojem pripojený väzbou na daný komplex.
3. **Nižší pseudopojem** je charakterizovaný jadrom, ktoré má už úplný imaginatívny reprezentant – prototyp so správnymi a jasnými črtami. Má hierarchicky usporiadanú štruktúru významových rovín M1, M2 a M3, pričom M1 ani M2 neobsahujú úplný počet prvkov charakterizujúcich plne vybudovaný pojem. Nižší pseudopojem ešte nemá ani zmyslové väzby na potenciálne kvality, teda jeho referenty nie sú plne vybudované pojmy. Môže existovať väzba na nadradený pojem, avšak zmysel pojmu neobsahuje všetky atribúty, atributívne väzby sú nedostatočne vytvorené, takže definícia pomocou nadradeného pojmu a atribútov je neúplná alebo celkom nesprávna.
4. **Vyšší pseudopojem** je charakterizovaný jadrom, ktoré má už úplný imaginatívny reprezentant – prototyp so správnymi a jasnými črtami. Má hierarchicky usporiadanú úplnú štruktúru významových rovín M1, M2 a M3 a zmyslové väzby na potenciálne kvality, ktoré rozčleňujú pojem na referenty ako plne vybudované pojmy. Existuje väzba na nadradený pojem, avšak zmysel pseudopojmu nemá úplne vytvorené atribúty, takže definícia pomocou nadradeného pojmu a atribútov je neúplná. Vyšší pseudopojem sa podobá na úplne vybudovaný pojem s jedným rozdielom: nedá sa správne definovať pomocou nadradeného abstraktnejšieho pojmu a atribútov.

Vyššie popísané etapy vývoja vedeckého pojmu nazveme **Vygotského štádiá formovania pojmu** a proces ich vývoja označíme ako **CPC–proces** (CPC = Complex → Pseudoconcept → Concept). Pôvodné Vygotského štádiá popisujú iba význam pojmu a zmyslové väzby na potenciálne kvality (Vygotsky, 1986). Vyššie formulované Vygotského štádiá popisujú aj jadro pojmu, kognitívne a kontextuálne väzby.

Úplný pojem obsahuje všetky prvky a má vytvorené všetky väzby, teda i väzbu na nadradený pojem. Výnimkou sú vedecké **primárne pojmy** (primary concepts), ktoré nemôžu mať nadradený pojem, pretože stoja v hierarchii pojmov najvyššie. Pomocou primárnych pojmov sú definované vedecké **sekundárne pojmy** (secondary concepts) a pomocou nich pojmy stojace v hierarchii pojmov ešte nižšie. V mechanike sú primárnymi pojmami napr. hmota, čas, priestor, stav, teleso, atď. V teoretickej mechanike je primárnym pojmom sila, ktorá ešte v klasickej mechanike primárnym pojmom nie je, pretože má nadradený pojem.

Pri vývoji pojmov prechádzajúcich cez Vygotského úrovne dosiahnu konkrétne pojmy – významovo nanajvýš dvojúrovňové, t.j. nemajú rovinu M1 – štádiom úplného pojmu oveľa skôr než abstraktné pojmy stojace v hierarchii pojmov vyššie. Napr. pri vývoji pojmu „kovový drôt ako vodič elektrického prúdu“ bolo zistené štádium nižšieho komplexu z vyjadrení štvorročného dieťaťa: „Drôt (obalený izoláciou) pripojíme k batérii, aby elektrina prišla ku žiarovke.“, „Do zásuvky nesmieme strkať kliniec, lebo nás kopne elektrina.“. Toto štádium je charakterizované designátmi a predstavami denotátov na jednej úrovni, pričom vo význame sú aj nesprávne denotáty, napr. (nevodivá) šnúra, ktorou dieťa pri hre pripojilo spotrebič (napr. sušič vlasov) k modelu elektrickej zásuvky (v ktorej nebola elektrina). To isté dieťa vo veku 6 rokov vedelo, že vodičom elektriny sú len kovové drôty a vedelo aj uviesť niekoľko príkladov (zvončekový drôt, vodič od lampy, štartovacie káble, ale aj iné látky napr. voda), teda jeho pojem bol vybudovaný na úrovni vyššieho komplexu. Dieťa vo veku 12 – 14 rokov už môže vedieť, že „vodičom elektriny sú všetky drôty, ktoré sú kovové“ a rozlišuje drôty tenké (horšie vodiče), hrubé (lepšie vodiče), drôty izolované (tie môže chytať do ruky) a neizolované (nesmie ich chytať do ruky, ak sú pripojené k zásuvke). Rozlišuje drôty z rôznych kovov, pretože pozná meď, železo, hliník, ktoré delia triedu kovových káblov ako vodičov na medené, železné, hliníkové. Dá sa povedať, že jeho pojem „kovový drôt ako vodič elektrického prúdu“ je minimálne na úrovni pseudopojmu. Ak však tento žiak vie, že elektrinu vedú aj iné látky (voda, kyselina) a má vybudovaný pojem „vodič elektrického prúdu“ aspoň na úrovni vyššieho pseudopojmu, a potom je pojem „kovový drôt ako vodič elektrického prúdu“ vybudovaný úplne.

V závere treba povedať, že delenie komplexu a pseudopojmu na dve podúrovne je približné a nevystihuje všetky možné variácie vo vývoji detských pojmov. Navyše absencia analýzy vývoja vzhľadom na kognitívne, operacionálne a kontextuálne väzby dáva tušiť, že línií a úrovní vývoja pojmov môže byť viac.

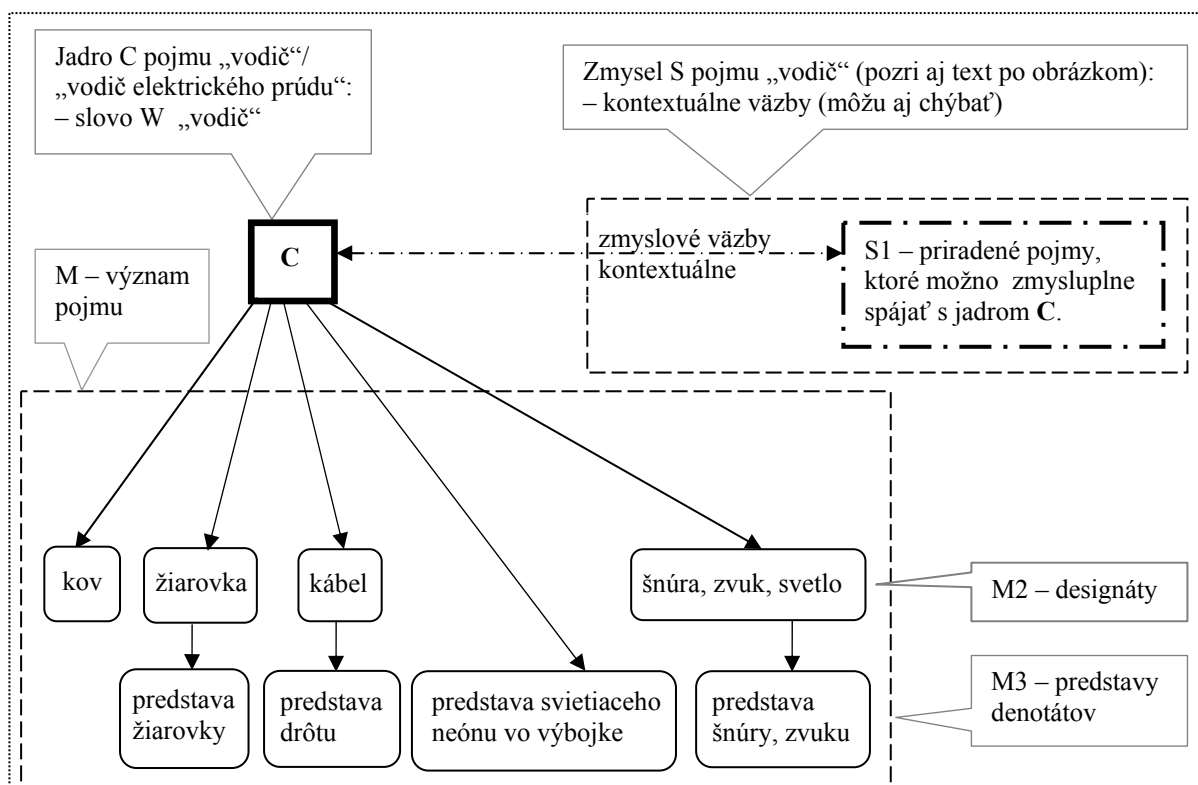
Vygotského štádiá formovania pojmu „vodič elektrického prúdu“

Schémy trojuholníkových modelov pojmu „vodič elektrického prúdu“ v štádiu nižšieho a vyššieho komplexu, nižšieho a vyššieho pseudopojmu a plne vybudovaného pojmu sú na obr. 2.1 až 2.5. Na schéme 2.6 je znázornený

trojuholníkový model pojmu „látka“, ktorý je nadradený plne vybudovanému pojmu „vodič elektrického prúdu“, kdežto u pseudopojmov a komplexov chýba.

Obr. 2.1: Trojuholníkový model komplexu „vodič elektrického prúdu“ skrátene „vodič“

Model znázorňuje pojem v štádiu nižšieho komplexu. Pravouhlé obdĺžniky (boxy) znázorňujú komponenty pojmovej štruktúry (C – jadro pojmu, množina S1); čiarkované obdĺžniky znázorňujú subsystemy (význam a zmysel), oválne obrazce znázorňujú designáty a predstavy denotátov, šípky znázorňujú väzby medzi prvkami pojmovej štruktúry, bodkovaný obdĺžnik znázorňuje celý pojem „vodič elektrického prúdu“. Bodkočiarkovaný box S1 a bodkočiarkovaná linka vyjadrujúca zmyslové väzby vyjadruje fakt, že komplex nemusí mať vybudovaný zmysel.



Jadro C nižšieho komplexu „vodič elektrického prúdu“ (skrátene „vodič“) je tvorené slovom „vodič“.

Imaginačný reprezentant u nižšieho komplexu ešte nie je vytvorený. Zastupuje ho nepresná a neúplná predstava napr. elektrického kábla, šnúry – prototypu, ktorý má aj nesprávne črty. Podľa nich dieťa zaraďuje do významu aj denotáty, ktoré nespádajú pod označenie „vodič elektrického prúdu“, napr. povraz, šnúru, ktoré mu tvarom pripomínajú vodič.

Komplex nemá nadradený pojem.

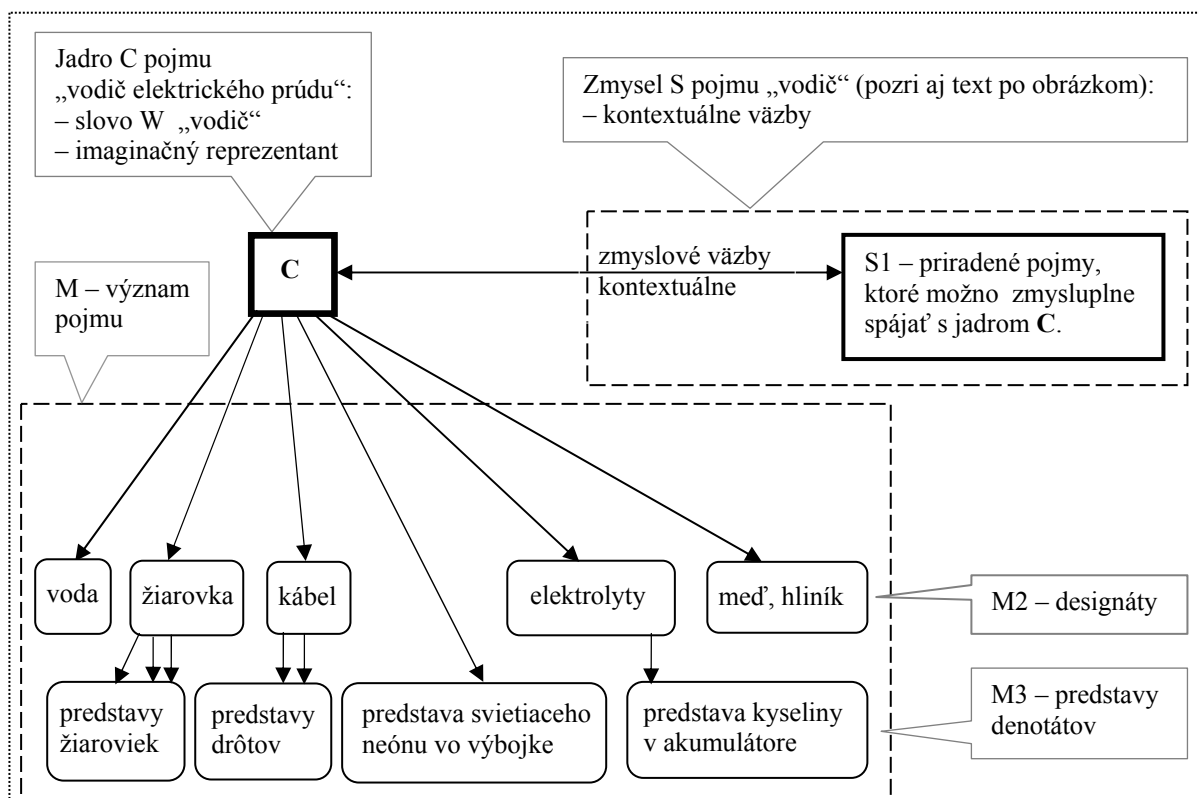
Zmysel S nižšieho komplexu „vodič elektrického prúdu“ môže byť tvorený:

- kontextuálnymi väzbami na pojmy „tiecť“, „žiarovka“, „batéria“, „elektrický obvod“, atď., ak žiak chápe a vie povedať: „Vodičom ide prúd.“ „Vodiče spájajú žiarovku, batériu a vypínač v elektrickom obvode.“. Tieto kontextuálne väzby však môžu aj chýbať, pretože žiak vie povedať iba: „Drôtom tečie prúd.“ alebo „Žiarovku, batériu a vypínač v elektrickom obvode spájajú drôty.“. Vtedy pojem „vodič“ ešte nemá vybudovaný zmysel – je to znázornené bodkočiarkovaným boxom S1 a šípkou znázorňujúcou zmyslové väzby. Zmysel majú vybudovaný (nie vždy) iba podradené pojmy – designáty.
- Kvalitatívne väzby na potenciálne kvality – „pevný“, „kvapalný“, „plynný“ nie sú vybudované.
- Atributívna väzba na termín „voľné elektrické častice“ nie je.

Význam M komplexu má vybudované nanajvyš dve významové roviny: rovinu M2 designátov a rovinu M3 konkrétnych predstáv denotátov. Žiak ešte nerozlišuje medzi referentmi a designátmi a má ich zaradené v rovine M2. Niektoré predstavy denotátov sa viažu priamo na jadro a k niektorým designátom si žiak nemusí vybaviť predstavu. Vo význame sú aj nesprávne designáty, napr. zvuk, signál, šnúra a pod.

Obr. 2.2: Trojuholníkový model komplexu „vodič elektrického prúdu“ skrátene „vodič“

Model znázorňuje pojem v štádiu vyššieho komplexu. Pravouhlé obdĺžniky (boxy) znázorňujú komponenty pojmovej štruktúry (C – jadro pojmu, množina S1); čiarkované obdĺžniky znázorňujú subsystémy (význam a zmysel), oválne obrazce znázorňujú designáty a predstavy denotátov, šípky znázorňujú väzby medzi prvkami pojmovej štruktúry, bodkovaný obdĺžnik znázorňuje celý pojem „vodič elektrického prúdu“.



Jadro C vyššieho komplexu „vodič elektrického prúdu“ (skrátene „vodič“) je tvorené slovom „vodič“ a imaginačným reprezentantom – predstavou konkrétneho vodiča napr. predstava kábla, drôtu atď., ktorý je prototypom s prevažne správnymi črtami.

Komplex nemá nadradený pojem.

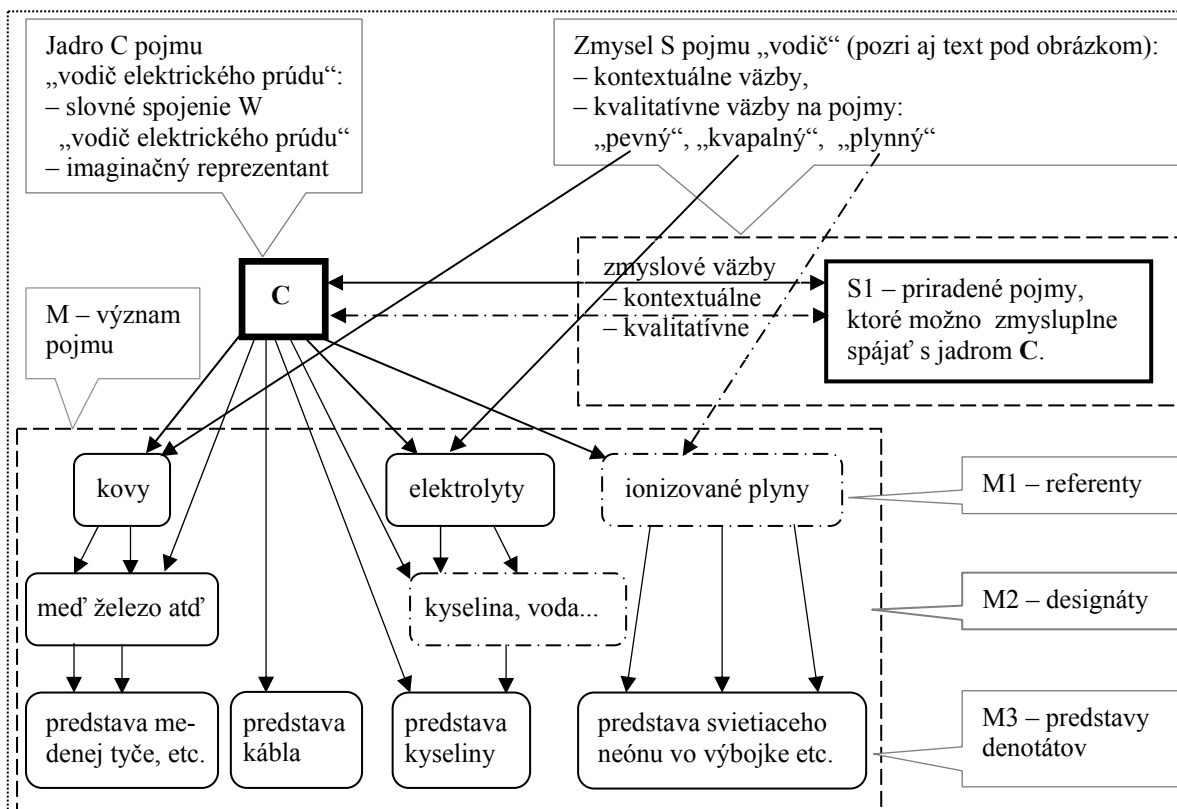
Zmysel S komplexu „vodič elektrického prúdu“ je tvorený:

- kontextuálnymi väzbami na pojmy „ísť“, „tiecť“, „žiarovka“, „batéria“, „elektrický obvod“, atď., t.j. žiak vie povedať: „Vodičom ide prúd.“ „Vodiče spájajú žiarovku, batériu a vypínač (v elektrickom obvode).“ Rozumie tomu, že prúd ide od zdroja k žiarovke len vtedy, keď je kábel pripojený k žiarovke aj ku zdroju. Nemusi však ešte mať predstavu uzavretého obvodu ako podmienky pre vznik elektrického prúdu. Čuduje sa, keď mu žiarovka nesvieti, pretože ju pripojil k zdroju iba jedným káblikom.
- Kvalitatívne väzby na potenciálne kvality – „pevný“, „kvapalný“, „plynný“ nie sú vybudované.
- Atributívna väzba na termín „voľné elektrické častice“ nie je.

Význam M komplexu má vybudované nanajvyš dve významové roviny: rovinu M2 designátov a rovinu M3 konkrétnych predstáv denotátov. Študent ešte nerozlišuje dôsledne medzi referentmi a designátmi a má ich zaradené v rovine M2. Niektoré predstavy denotátov sa viažu priamo na jadro.

Obr. 2.3: Trojuholníkový model pseudopojmu „vodič elektrického prúdu“ skrátene „vodič“

Model znázorňuje komplex v štádiu nižšieho pseudopojmu. Pravouhlé obdĺžniky (boxy) znázorňujú komponenty pojmovej štruktúry (C – jadro pojmu, množina S1); čiarkované obdĺžniky znázorňujú subsystemy (význam a zmysel), oválne boxy znázorňujú referenty, designáty a predstavy denotátov, šípky znázorňujú väzby medzi prvkami pojmovej štruktúry. Bodkočiarkované oválne boxy a šípky znázorňujú, že príslušné podradené pojmy ako aj zmyslové väzby na potenciálne kvality nemusia byť vybudované. Bodkovaný obdĺžnik znázorňuje celý pojem „vodič elektrického prúdu“.



Jadro C pseudopojmu „vodič elektrického prúdu“ (skrátene „vodič“) je tvorené slovom „vodič“, resp. slovným spojením „vodič elektrického prúdu“ a imaginačným reprezentantom, ktorým môže byť predstava konkrétneho vodiča napr. predstava kovového kábla, drôtu s izoláciou, alebo bez nej atď.

Pseudopojem ešte nemá väzbu na nadradený pojem.

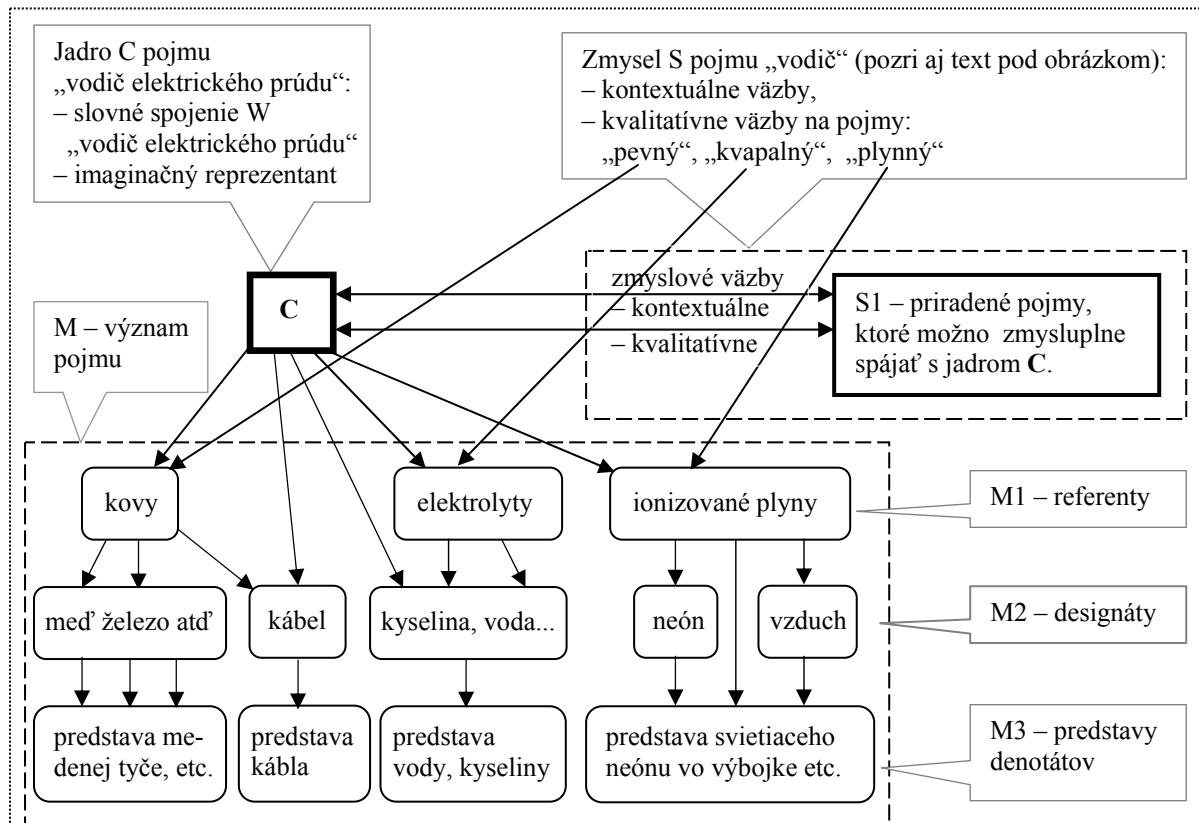
Zmysel S pseudopojmu „vodič elektrického prúdu“ je tvorený:

- kvalitatívnymi väzbami na potenciálne kvality – „pevný“, „kvapalný“, „plynný“, ktoré rozdelia množinu elektrických vodičov na vodiče pevné, vodiče kvapalné a vodiče plynné. Ak referenty nie sú plne vybudované pojmy, pojem vodiča elektrického prúdu nemá potenciálne kvality plne vytvorené. Je to znázornené bodkočiarkovanými šípkami.
- kontextuálnymi väzbami na pojmy „tiecť“, „žiarovka“, „batéria“, „elektrický obvod“, „zdroj prúdu“, „akumulátor“ atď., pretože študent vie povedať: „Vodičom tečie prúd.“ „Vodiče spájajú žiarovku, batériu a vypínač v elektrickom obvode.“
- Atributívna väzba na termín „voľné elektrické častice“ ešte nie je. Študenti nevedia sformulovať definíciu ako napr. „Vodič je látka, ktorá obsahuje voľné elektrické častice.“

Význam M pseudopojmu nemá úplne vybudované všetky tri významové roviny M1, M2, M3 – je to znázornené chýbajúcimi alebo bodkočiarkovanými boxmi. Okrem toho študent ešte nemá jasnú hierarchiu referentov, designátov a denotátov a nedostatočne medzi nimi rozlišuje, takže niektoré designáty nie sú podradené referentom, ale viažu sa priamo na jadro, aj niektoré predstavy denotátov nie sú podradené designátom, takže sa viažu sa priamo na jadro.

Obr. 2.4: Trojuholníkový model pseudopojmu „vodič elektrického prúdu“ skrátene „vodič“

Model znázorňuje komplex v štádiu vyššieho pseudopojmu. Pravouhlé obdĺžniky (boxy) znázorňujú komponenty pojmovej štruktúry (C – jadro pojmu, množina S1); čiarkované obdĺžniky znázorňujú subsystemy (význam a zmysel), oválne boxy znázorňujú referenty, designáty a predstavy denotátov“, šípky znázorňujú väzby medzi prvkami pojmovej štruktúry. Bodkovaný obdĺžnik znázorňuje celý pojem „vodič elektrického prúdu“.



Jadro C vyššieho pseudopojmu „vodič elektrického prúdu“ (skrátene „vodič“) je tvorené slovom „vodič“, resp. slovným spojením „vodič elektrického prúdu“. Imaginárnym reprezentantom pseudopojmu môže byť predstava konkrétneho vodiča napr. predstava kábla, drôtu atď.

Pseudopojem ešte nemá väzbu na nadradený pojem.

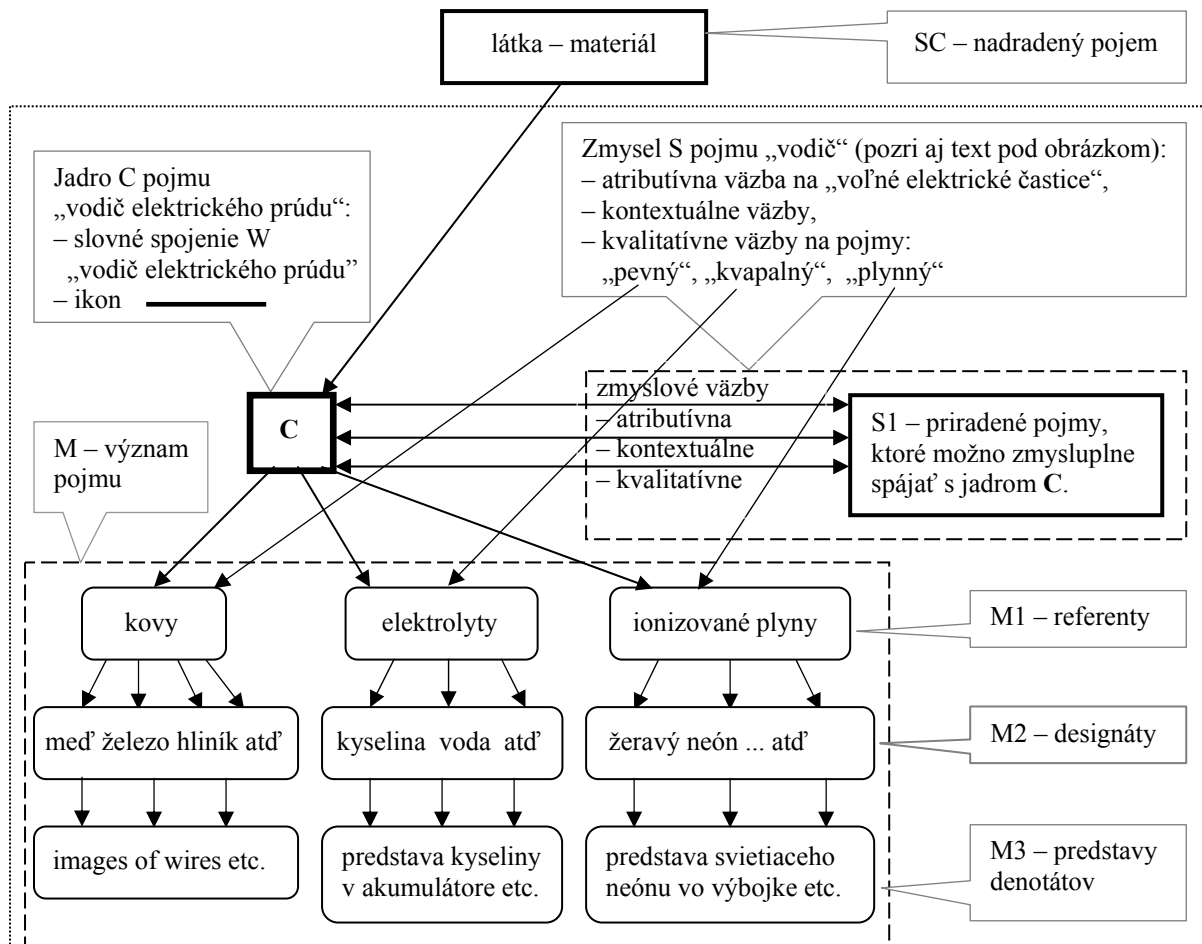
Zmysel S vyššieho pseudopojmu „vodič elektrického prúdu“ je tvorený:


- kvalitatívnymi väzbami na potenciálne kvality – „pevný“, „kvapalný“, „plynný“, ktoré rozdelia množinu elektrických vodičov na vodiče pevné, vodiče kvapalné a vodiče plynné. Ak referenty nie sú plne vybudované pojmy, pojem vodiča elektrického prúdu nemá potenciálne kvality plne vytvorené.
- kontextuálnymi väzbami na pojmy „tiecť“, „žiarovka“, „batéria“, „elektrický obvod“, atď., pretože môžeme povedať: „Vodičom tečie prúd.“ „Vodiče spájajú žiarovku, batériu a vypínač v elektrickom obvode.“
- Atributívna väzba na termín „voľné elektrické častice“ ešte nie je. Študenti nevedia sformulovať definíciu ako napr. „Vodič je látka, ktorá obsahuje voľné elektrické častice.“

Význam M vyššieho pseudopojmu má prakticky úplne vybudované všetky tri významové roviny M1, M2, a M3. Študent má hierarchiu referentov, designátov a denotátov; takže pripojenie designátov priamo na jadro je zriedkavé.

Obr. 2.5: Trojuholníkový model pojmu „vodič elektrického prúdu“ skrátené „vodič“

Model znázorňuje plne sformovaný pojem. Pravouhlé obdĺžniky (boxy) znázorňujú komponenty pojmovej štruktúry (C – jadro pojmu, množina S1, SC – nadradený pojem); čiarkované obdĺžniky znázorňujú subsystemy (význam a zmysel), oválne obrazce (boxy) znázorňujú referenty, designáty a predstavy denotátov“, šípky znázorňujú väzby medzi prvkami pojmovej štruktúry, bodkovaný obdĺžnik znázorňuje celý pojem „vodič elektrického prúdu“.



Jadro C pojmu „vodič elektrického prúdu“ (skrátené „vodič“) je tvorené slovom „vodič“, resp. slovným spojením „vodič elektrického prúdu“. Tento termín nie je fyzikálnou veličinou, takže nemá symbol. Imaginárny reprezentant má u plne vytvoreného pojmu tvar , čo je elektrotechnická značka vodiča.

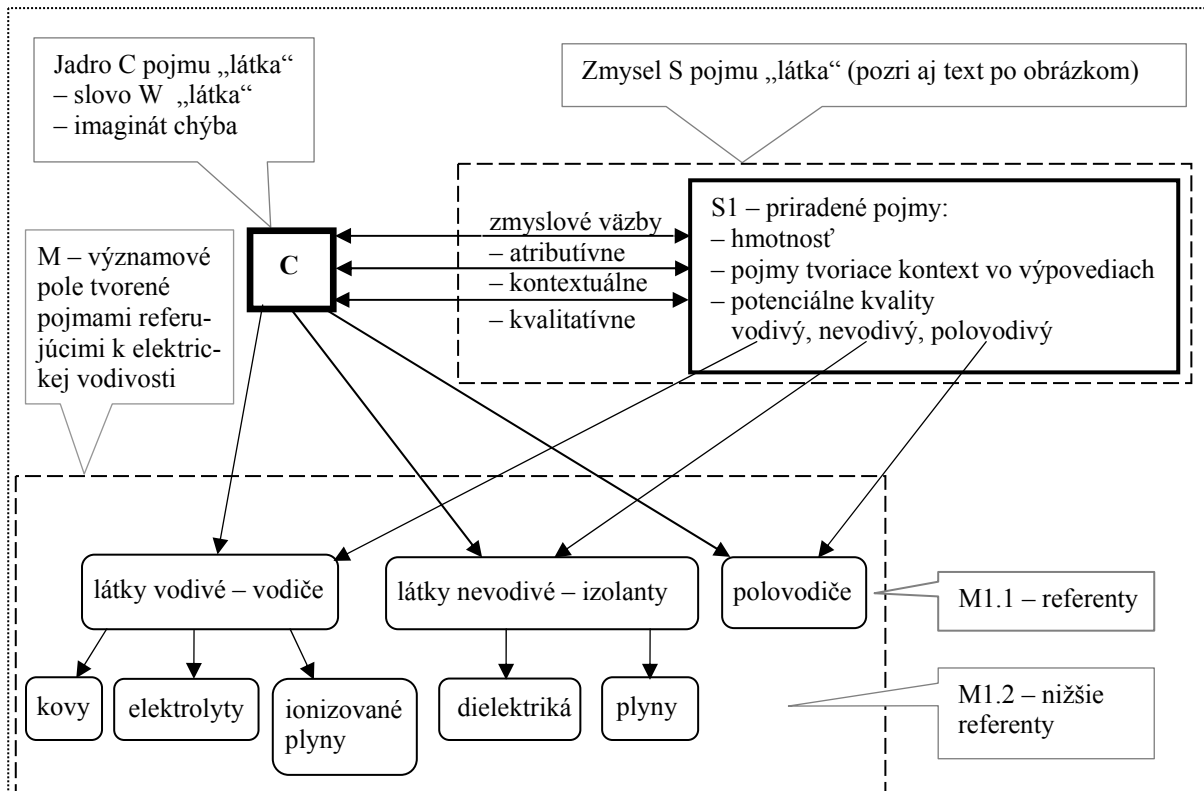
Zmysel S pojmu „vodič elektrického prúdu“ je tvorený:

- atributívnou väzbou na termín „voľné elektrické častice“. V definícii „Vodič je látka, ktorá obsahuje voľné elektrické častice.“ je „látka“ nadradený pojem, termín „voľné elektrické častice“ je atribút.
- kvalitatívnymi väzbami na potenciálne kvality – „pevný“, „kvapalný“, „plynný“, ktoré rozdelia množinu elektrických vodičov na vodiče pevné, vodiče kvapalné a vodiče plynné.
- kontextuálnymi väzbami na pojmy „tečiť“, „žiarovka“, „batéria“, „elektrický obvod“, atď., pretože môžeme povedať: „Vodičom tečie prúd.“ „Vodiče spájajú žiarovku, batériu a vypínač v elektrickom obvode.“

Význam M plne vytvoreného pojmu má úplne vybudované a hierarchicky usporiadané všetky tri významové roviny M1, M2, a M3.

Obr. 2.6: Trojuholníkový model pojmu „látka“, ktorý je nadradený pojmu „vodič elektrického prúdu“

Pravouhlé obdĺžniky (boxy) znázorňujú komponenty pojmovej štruktúry (C – jadro pojmu, množina S1); čiarkované obdĺžniky znázorňujú subsystemy (význam a zmysel), oválne obrazce znázorňujú referenty, šípky znázorňujú väzby medzi prvkami pojmovej štruktúry, bodkovaný obdĺžnik znázorňuje celý pojem „vodič elektrického prúdu“.



Jadro C pojmu „látka“ je tvorené slovom „látka“. Pretože „látka“ je vysoko abstraktný pojem na formálnej úrovni, v jadre už imaginálny reprezentant obvykle nie je.

Zmysel S pojmu „látka“ je tvorený:

- atributívnou väzbou na pojem „hmotnosť“, pretože látka je forma hmoty, ktorá má (nenulovú pokojovú) hmotnosť na rozdiel od poľa, ktoré je tiež formou hmoty s nulovou pokojovou hmotnosťou. V definícii „Látka je forma hmoty, ktorá má (nenulovú pokojovú) hmotnosť.“ je „hmota“ pojem nadradený a „hmotnosť“ je atribút.
- kontextuálnymi väzbami na pojmy „je“, „skladá sa“, „rôzny“, „molekula“, „atóm“, „forma“ atď. pretože môžeme povedať: „Látka sa skladá z molekúl.“, „Tieto látky sú vodivé.“, „Látka je forma hmoty.“
- kvalitatívnymi väzbami na potenciálne kvality – „vodivý“, „nevodivý“, „polovodič“.

Do významovej roviny M1.1 patrí aj referent „plazma“, ktorý sa v modernej fyzike pokladá za štvrté skupenstvo hmoty.

Vo významovom poli nie sú znázornené nižšie významové roviny M2 a M3, ktoré sú súčasťou významu.

Význam M pojmu „látka“ má aj iné významové pole, ktoré je tvorené pojmi „pevné látky“, „kvapaliny“ a „plyny“.

4. Vývojové úrovne matematických a fyzikálnych pojmov

Trojuholníkový model štruktúry pojmu popisuje vo všeobecnosti základné prvky a väzby pojmovej štruktúry. Jednotlivé pojmy externých aj interných pojmových poznatkových systémov však nemusia v konkrétnych prípadoch obsahovať všetky prvky svojej štruktúry, čo sa prejavuje predovšetkým pri vývoji vedeckých pojmov v histórii vied aj v edukačnom procese. Analýza historického vývoja externých pojmových poznatkových systémov viedla k rozlíšeniu viacerých vývojových úrovní pojmov vo fyzike a matematike (pozri obr. 3). Niektoré z týchto úrovní boli rozpoznané pri štúdiu pojmov u žiakov základnej školy a študentov gymnázia (Tarábek, 2005a, Tarábek 2007a, 2007b). Úrovne pojmov popisované v ďalšom texte majú rôzne charakteristiky v závislosti od toho, akú vývojovú líniu sledujeme. Doposiaľ boli študované tri vývojové línie:

1. vývoj externých pojmových poznatkových systémov vo fyzike,
2. vývoj pojmov v matematike,
3. vývoj interných pojmov u detí a študentov v jazykovom prostredí predškolskej výchovy a školskom prostredí.

Z tohto dôvodu boli prvé dve vývojové úrovne pojmov označované rôznymi názvami, ktoré zodpovedali ich charakteristickým znakom. V tejto štúdiu sa pokúsime terminológiu zjednotiť, pričom pôvodné názvy ponechávame ako lokálne názvy pre jednotlivé línie vývoja.

Primitívna úroveň pojmov

Primitívna úroveň pojmov zodpovedá **primitívne-empirickej úrovni** pojmových poznatkových systémov.

Primitívne-empirická úroveň externých pojmových poznatkových systémov (EPPS) je úroveň poznania vychádzajúca priamo zo skúsenosti, kde poznávaným univerzom je realita. Množina pojmov je tvorená súborom málo diferencovaných konkrétnych pojmov na nízkej úrovni abstrakcie s dominantnými významovými väzbami. Pojmy ešte netvorí hierarchizovaný systém. Množina vzťahov Re je tvorená súborom evidentných empirických skúseností – zovšeobecnení tried konkrétnych pozorovaných a vnímaných faktov. Fakty sa týkajú pozorovaných javov, ich priebehu, vlastností, súvislostí a pod. ako aj vlastností objektov. Takáto úroveň EPPS je prvá úroveň spontánneho empirického poznávania prírody, ktoré ešte nemožno označiť za vedecké, umožňuje však základnú orientáciu vo svete a usmerňuje tým chovanie poznávacích subjektov. Primitívne-empirická úroveň existovala v začiatkoch vývoja ľudských spoločností.

Snaha človeka pomenovávať veci viedla k tomu, že spočiatku nepomenované predstavy objektov, javov, dejov a situácií dostávali mená, ktoré boli spočiatku vlastnými menami. Neskôršie v priebehu vývoja pojmov označovali mená triedy denotátov. Imaginačné reprezentanty boli neúplné, nepresné a nevyjadrovali všetky charakteristické črty danej triedy denotátov. Vzhľadom na skutočnosť, že tieto pojmy vyjadrujú prvotné empirické zovšeobecnenia týkajúce sa pozorovaných objektov, javov, dejov, možno ich označiť aj ako pojmy na **primitívne-empirickej úrovni**.

U interných pojmových poznatkových systémov možno v tejto súvislosti hovoriť o nižšej empirickej úrovni, ktorá zodpovedá bežnej životnej skúsenosti človeka a konkrétne používanému prirodzenému jazyku. V pojmovej štruktúre sú dominantné významové väzby na realitu, zo zmyslových väzieb sa vyskytujú len kontextuálne väzby prirodzeného jazyka a čiastočne kvalitatívne (ostatné väzby len v malom množstve). V jadre pojmov sú prevažne neúplné imagináty a slová, vyskytujú sa aj prípady, keď v IPPS sú pojmy nepomenované slovami. Skúsenosti ako najnižšia forma poznatkov majú charakter časopriestorových väzieb (mnohokrát i nesprávnych), ďalej z ostatných väzieb sa vyskytujú predovšetkým kauzálne súvislosti, ktoré človek pozoruje ako prvé najprv v ľudskom spoločenstve a potom ich premieta do prírody. V množine Re sú ďalej skúsenosti vyjadrujúce vlastnosti objektov a dejov – kvalitatívne väzby. Skúsenosti typu lokalizačných a procesuálnych väzieb sa týkajú rozmiestnenia objektov okolitého sveta a ich správania – procesov. Dominantným prístupom k realite je relačný prístup – t.j. hľadanie vzťahov, súvislostí medzi objektami, javmi a dejmi.

Matematické pojmy sú formované v prostredí prirodzeného jazyka tak, že dieťa počúva pomenovania matematických objektov či javov a priraduje si k nim príslušné predstavy. Pretože predstavy sú dominantné v určovaní príslušnosti k triede denotátov, môžeme hovoriť aj o **obrazovej úrovni** vývoja matematických pojmov. Napr. na začiatku svojho vývoja je pojem konkrétneho prirodzeného čísla tvorený predstavou počtu konkrétnych predmetov, ku ktorej je v mysli pripojený dvojslovný názov, napr. „jeden cukrík“ „dva cukríky“, atď. Deti v počiatkovej etape používajú iba tri číslovky „jeden“, „dva“ a „veľa“ resp. „všetky“, ktoré sú pevne spojené s príslušným slovom označujúcim predmet – prst, cukrík, guľôčka – podobne, ako to bolo v prvých obdobiach vývoja ľudskej spoločnosti. Postupne sa počet používaných čísloviek zvyšuje a ich slovné názvy sú schopné odpojenia od názvov predmetov, s ktorými boli pôvodne spojené. Prejavuje sa to prenášaním názvov čísla aj na počty iných predmetov.

Inú štruktúru majú pojmy, ktoré si dieťa alebo žiak/študent osvojuje pri učení sa jazyku alebo v priebehu vyučovacieho procesu v tom prípade, ak učenie nie je sprevádzané dostatočnou imagináciou (nie je názorné).

Ak študent číta či učí sa definíciu nejakého termínu a nemá k nemu dostatok názorných príkladov, pozná síce jeho názov, väzbu k nadradenému pojmu i kvality, avšak predstavy priradené k danému názvu sú len neurčité, hmlisté. Vtedy tento jeho pojem nemá imaginačný reprezentant, pretože sa nemal z čoho vytvoriť.

Podobne dieťa, ktoré počúva reč dospelých, si zapamätá dané slovo alebo slovné spojenie v súvislosti s určitou situáciou, javom či dejom. Potom zapamätané slovo alebo slovné spojenie použije na pomenovanie situácie, deja, javu, ktorý sa podobá tomu, ktorý v súvislosti s daným slovo/slovným spojením zaregistroval predtým a takto si overuje, či je daný názov správny. Aj po zafixovaní slova/slovného spojenia na určitú predstavu to spočiatku ešte nie dobre sformovaný imaginát, pretože konkrétne synkretické myslenie dieťaťa k nemu pridáva aj nesprávne a neurčité črty. Preto vznikajú pre detskú reč typické počiatočno „detské omyly“, keď je slovo/slovné spojenie/veta použité neprimerane. Dieťa po zvládnutí reči môže mať vytvorené k danému slovu mnoho kontextuálnych väzieb, takže ho vie správne používať – najmä v jazykovom prostredí bohatom na podnety. Jeho reč je rozvinutá, ale predmetný obsah používaných pojmov je chudobný – vo význame týchto pojmov je len úzka trieda denotátov. Tieto pojmy „tvorom“ pripomínajú T – majú úzku významovú oblasť a širokú sieť kontextuálnych väzieb – preto ich môžeme nazvať „**T-pojmy**“.

Pojmy na primitívnej úrovni formované v prostredí prirodzeného jazyka či vo vyučovacom procese sú charakterizované slovom ako dominantným prvkom ich jadra. Preto ich nazývame **slovné pojmy** (word concept) alebo **W-pojmy**.

Imaginačná úroveň pojmov

Empirická úroveň EPPS je v prípade počiatkov extenzívne rozvíjaných vedných disciplín charakterizovaná v pojmovej oblasti triedením rozsiahleho súboru študovaných objektov a javov, diferenciaciou, klasifikáciou a zvyšovaním úrovne abstrakcie pojmov, vytváraním hierarchizovaného systému pojmov. Typický pre prechod z nižšej na vyššiu empirickú úroveň je triediaci prístup.

V prípade základných vied, ako je napr. fyzika, dochádza k vyčleneniu určitého počtu obecně popisovaných objektov a javov. Tieto sú popisované pojmi, ktoré majú silné významové väzby na realitu, u mnohých pojmov sa však vytvárajú aj zmyslové väzby v plnom rozsahu. Prejavuje sa to u týchto pojmov vytváraním verbálnych definícií a operacionálnych priradení. Štujú sa všetky vlastnosti objektov a dejov, t. j. rozširuje sa množina kvalitatívnych väzieb a v súvislosti s rozvojom poznatkovej oblasti sa vytvárajú aj kognitívne väzby. Jadro pojmu je tvorené slovom a imaginátom. Vo fyzikálnych pojmovo-poznatkových systémoch nazývame túto úroveň aj **empirická úroveň pojmov**.

V poznatkovej oblasti sa popri relačnom prístupe začína uplatňovať zákonitostný prístup, t. j. poznávací subjekt hľadá v skúmanom univerze určité zákonitosti. Tieto zákonitosti majú podobu tzv. „zákonov javu“, alebo empirických kauzálnych zákonov typu „jav–jav“ resp. „entita–jav“. Zákony javu sú formulované ako jednoduché faktúálne výroky popisujúce vlastnosti a chovanie objektov, priebeh javov a pod. U Aristotela sú to napr. výroky typu „Ťažké telesá padajú nadol a ľahké telesá (dym) stúpajú nahor.“, „Telesá padajú nadol tým rýchlejšie, čím sú ťažšie a tým pomalšie, čím je väčší odpor prostredia (daný veľkosťou telesa a hustotou prostredia)“. Je zrejmé, že sa jedná o zovšeobecnenie empirických skúseností vychádzajúce evidentne z priamo pozorovania. Podobne i zákony typu „jav–jav“ resp. „entita–jav“ sú formulované ako jednoduché faktúálne výroky popisujúce zákonoté súvislosti medzi vymedzenými triedami prvkov reality. Typickým kauzálnym zákonom typu „jav–jav“ je Tháletovo a Anaxagórovo vysvetlenie záplav na Níle. Tháles (nesprávne) tvrdí, že „pasátne“ vetry vanúce proti Egyptu zdvíhajú vody Nílu, kdežto Anaxagorás vysvetľuje, že „Níl stúpa v lete, pretože doňho stekajú vody z topiaceho sa snehu alebo z veľkých dažďov“. Príkladom kauzálného zákona typu „entita–jav“ je Aristotelovo tvrdenie o „sile ako príčine pohybu“ (Antológia, 1972). Jedná sa o pohyby tzv. násilné, pretože Aristoteles rozlišuje pohyby na prirodzené a násilné – zapríčinené silami. Na empirickej úrovni EPPS sa objavujú aj prvé princípy, napr. princíp kauzality, ktorý je po jeho zvedomení východiskom pre kauzálny prístup k realite.

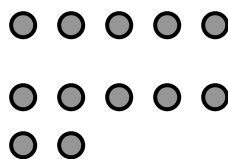
Na empirickej úrovni EPPS sú okrem empirických zákonov budované aj jednoduché verbálne-imaginačné modely pozorovanej reality, ako bol napr. Démokritov model prírody zloženej z atómov, Hérakleitov model vesmíru, model vzniku ročných období a pod. (Svoboda, 1962). Tieto modely majú explanačnú funkciu, t. j. majú vysvetliť pozorované javy.

V matematických pojmoch sa v súvislosti s potrebou ich zápisu pri početových úkonoch vytvárajú obrazové formy sémantického imaginačného reprezentanta – ikony. Preto hovoríme aj o **ikonickej úrovni** pojmov. Ikony sa v priebehu vývoja rýchlo menia na číslice. Typické ikony predstavujú napr. babylonské číslice, číslice Mayov, ale aj geometricky usporiadané obrazce bodiek (koliesok) používané pri vyučovaní matematiky v prvom ročníku základnej školy.

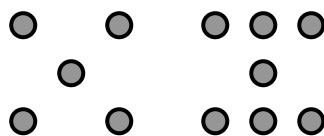
Numerické ikony pre čísla 5 a 7

a) v učebnici

(Tarábek, Kopečková 2005)



b) v práci (Kopásková, 2006)

c) Babylonské
numerické ikony
(The Mac Tutor, 2007)d) numerické
ikony Mayov

Imaginácia pri prechode z prvej na druhú úroveň vývoja znamená vytvorenie imaginatívneho reprezentanta v jadre pojmu. Imaginatívny reprezentant – imaginát je obrazový prototyp pojmu obsahujúci charakteristické znaky triedy denotátov. Má veľmi dôležitú úlohu, pretože umožňuje správne používanie pojmu podľa charakteristických črt prototypu. Preto tieto pojmy nazývame aj **imaginatívne pojmy (I – pojmy) – image concepts**.

Symbolická úroveň pojmov

Symbolickú úroveň dosahujú tie vedecké pojmy na **parametrickej úrovni** externých pojmov poznatkových systémov, ktoré vyjadrujú fyzikálne a matematické veličiny.

Parametrická úroveň pojmov poznatkových systémov

Parametrická úroveň externých pojmov-poznatkových systémov je charakterizovaná predovšetkým tým, že prírodné (fyzikálne) zákony sú popisované matematickým jazykom ako relačné resp. funkčné vzťahy medzi (fyzikálnymi) veličinami. Zákonitosti, ktoré mali na nižšej – empirickej úrovni verbálnu formu, nadobúdajú procesom parametrizácie na tejto úrovni tzv. parametrickú formu (Tarábek, 1985) vyjadrenú obvykle funkčnou závislosťou $F = (h_1, h_2, \dots, h_n) = 0$, kde h_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sú hodnoty parametrov S_1, S_2, \dots, S_n popisujúcich prírodné javy, procesy, vlastnosti objektov, javov a pod. Na parametrickej úrovni sa príroda stáva pre vedcov univerzom, ktoré je matematicky popisateľné. Neurčité verbálne pojmy sú zamieňané za presné, ostré pojmy fyzikálnych veličín (Tarábek, 1988). Typické parametrické fyzikálne zákony sú napr. Galileiho zákon voľného pádu, Keplerove zákony, Gay-Lussacov objemový zákon pre plyn, Proustov zákon o stálych a Daltonov zákon o násobných zlučovacích pomeroch v chémii atď. Parametrická úroveň je ďalej charakterizovaná skutočnosťou, že každý zo zákonov popisuje určitú vymedzenú triedu javov a medzi jednotlivými zákonmi nie sú zatiaľ súvislosti. Túto úroveň napr. dosiahla mechanika pred Newtonom, elektrodynamika pred Maxwellom. Okrem zákonitostného prístupu, ktorý sa prejavuje formulovaním zákonitostí v matematickom jazyku, sa začína uplatňovať explanačný prístup, ktorý vedie k vytváraniu (konštrukcii) nových pojmov, väzieb, modelov, princípov a zákonov vo forme čiastkových hypotéz vysvetľujúcich tvar a formu niektorých existujúcich zákonov. Popri zákonoch v matematickom jazyku existujú na parametrickej úrovni aj verbálne formulované zákonitosti – princípy. K parametrickej úrovni EPPS neodmysliteľne patria aj priestorovo-časové modely skúmaného univerza, do ktorých sú fyzikálne parametrické zákony zasadené.

Vedecké pojmy na parametrickej úrovni sa podstatne odlišujú od pojmov na empirickej úrovni. Aby mohli byť zákonitosti formulované v matematickom jazyku, pojmy sa museli zmeniť.

Procesom idealizácie dochádza k vytváraniu **idealizovaných pojmov** (t.j. pojmov referujúcich k idealizovanej triede denotátov), ktoré umožňujú popis javov prostredníctvom fyzikálnych veličín. Takýmito pojmi sú napr. dráha, rýchlosť, zrýchlenie, čas, hmotnosť, hybnosť, sila, atď. Idealizovanými pojmi sú aj všetky matematické veličiny.

Procesom idealizácie prechádzajú však aj pojmy, ktoré sa netýkajú fyzikálnych veličín, napr. vo fyzike je to pojem hmotného bodu, tuhého telesa, ťažiska atď. V matematike sú takýmito idealizovanými pojmi napr. geometrické – „úsečka“, „bod“, „priamka“, „trojuholník“ a pod.

Idealizované pojmy sú abstraktnými myšlienkovými konštrukciami a ich denotátmi sú entity, na rozdiel od pojmov empirickej úrovne, ktoré sú zväčša predmetné, t.j. ich denotátmi sú objekty, javy, deje v realite. Neurčito definované pojmy empirickej úrovne sa na symbolickej úrovni menia na presne definované pojmy prepojené na iné pojmy presne formulovanými definíciami.

Symbolizácia pri prechode na symbolickú úroveň znamená pripojenie symbolu na jadro. Týka sa to pojmov, ktoré sú fyzikálnymi a matematickými veličinami. Preto tieto pojmy nazývame **S-pojmy** (symbol-pojmy) – **symbol concepts**. Idealizované pojmy na symbolickej úrovni, ktoré nie sú veličinami a označujú obvykle idealizované matematické či fyzikálne objekty, môžeme nazvať **nevlastné S-pojmy**, pretože aj tieto pojmy často majú

(predovšetkým v matematike) v jadre symboly (napr. označenie priamok, úsečiek, bodov, uhlov, množín a pod. písmenami).

Štruktúrna úroveň pojmovo-poznatkových systémov

Štruktúrna úroveň externých pojmovo-poznatkových systémov je charakterizovaná vytvorením komplexných štruktúr vedeckých poznatkov, ktoré majú formu uzavretých vedeckých teórií vysvetľujúcich všetky parametrické zákony a pravidlá objavované v predchádzajúcej etape na parametrickej úrovni poznávania. Mechanika napr. dosiahla štrukturalizačnú úroveň Newtonovou teóriou, elektrodynamika Maxwellovou teóriou. Štruktúra teórie ako súčasť EPPS je tvorená základnými fyzikálnymi princípmi, zákonmi zachovania, základnými rovnicami, ktoré sú zasadené do príslušného fyzikálneho modelu reality (napr. Newtonov model absolútneho priestoru, času a hmotnosti vyjadrujúcej nemenné mechanické vlastnosti telies a sily pôsobiacej okamžite na diaľku, t. j. šírenie silového pôsobenia nekonečnou rýchlosťou; alebo „axwellov model éteru. Ďalej je štruktúra EPPS tvorená deduktívnymi väzbami na odvodené fyzikálne zákony a pravidlá, na fyzikálne rovnice popisujúce priebeh konkrétnych javov. Na štrukturalizačnej úrovni nemožno ešte hovoriť o interpretáciách teórie, ale iba o jej aplikáciách. Prechod medzi parametrickou a štrukturalizačnou úrovňou môžeme charakterizovať ako **štrukturalizáciu** a uplatňuje sa pri tom explanačný prístup, t.j. ide o vysvetlenie celej triedy zákonitostí objavených na predchádzajúcej úrovni na základe nejakého obecného princípu, zákona resp. obecnej teórie.

Na štruktúrna úrovni EPPS sa idealizované pojmy parametrickej úrovne dotvárajú do konečnej podoby, ktorá je charakterizovaná možnosťou odpájania významových rovín od jadra. V štruktúre pojmu sa stávajú dominantnými zmyslové väzby začleňujúce pojem do štruktúrna siete vedeckej teórie. Mysel je schopná operovať s pojmom prostredníctvom zmyslových väzieb v rámci štruktúry IPPS aj bez používania jeho významu.

Procesom ideácie sa vytvárajú aj nové pojmy – **idey** potrebné ako stavebné kamene novej teórie. Takýmto pojmom je napr. pojem energie v mechanike, „entropia“ v termodynamike, pojmy operátorov v kvantovej mechanike a pod.. Ďalej súčasťou teórie sa stávajú matematické pojmy – **idey**, ktoré vystupujú v základných zákonoch (napr. pojem derivácie, integrálu, rotácie, divergencie a pod.).

Formálna úroveň pojmov

Formálna úroveň externého pojmovo-poznatkového systému je dosahovaná po dlhom procese vývoja príslušnej fyzikálnej teórie. Východiskom býva matematický formalizmus teórie, ktorá je však viazaná na predmetné priestorovo-časové modely skúmaného univerza a tým je názorná. Ak matematický formalizmus príslušnej fyzikálnej teórie nevyhovuje, využijú sa iné matematické formálne teórie. Dosiahnutím úrovne formalizácie sa fyzikálna teória stáva nezávislou na názore a formalizmus umožňuje riešiť a skúmať aj také problémy, ktoré sú názoru neprístupné. Formálna fyzikálna teória je nadradená fyzikálnym teóriám s predmetným obsahom, ktoré boli sformulované na štruktúrna úrovni i teóriám, ktoré boli jej rozpracovaním. Je to logicky konzistentná axiomatizovaná teória, u ktorej predmetný obsah nie je podstatný ani potrebný. Typická pre formálnu teóriu je možnosť rôznych interpretácií smerom do reality. Čistou formou teórie na formalizačnej úrovni sú matematické formálne teórie, ktoré nie sú viazané na predmetný obsah, umožňujú celú radu interpretácií, z ktorých sa niektoré v procese fyzikálneho poznávania ukázali ako reálne.

Vedecké pojmy formálnych teórií na formalizačnej úrovni sú procesom **formalizácie** zbavené ich predmetného obsahu, t. j. ich intenzia stráca pôvodné významové väzby smerom do reality a zostávajú len zmyslové väzby. Preto tieto pojmy nazývame **formálne pojmy – formal concepts**.

Formálne pojmy ako idealizované pojmy a idey bez fixných významových väzieb umožňujú vytvárať viaceré významové interpretácie, t. j. viaceré súbory významových väzieb, ktoré však nie sú trvalou súčasťou týchto termínov ako je to napr. u polysémantických pojmov s viacerými významami tvoriacimi významové pole. Formálna fyzikálna alebo matematická teória potom môže popisovať viaceré modely fyzikálnej reality alebo matematického univerza, ktoré sa stávajú reprezentáciami teórie (Voight, 1981).

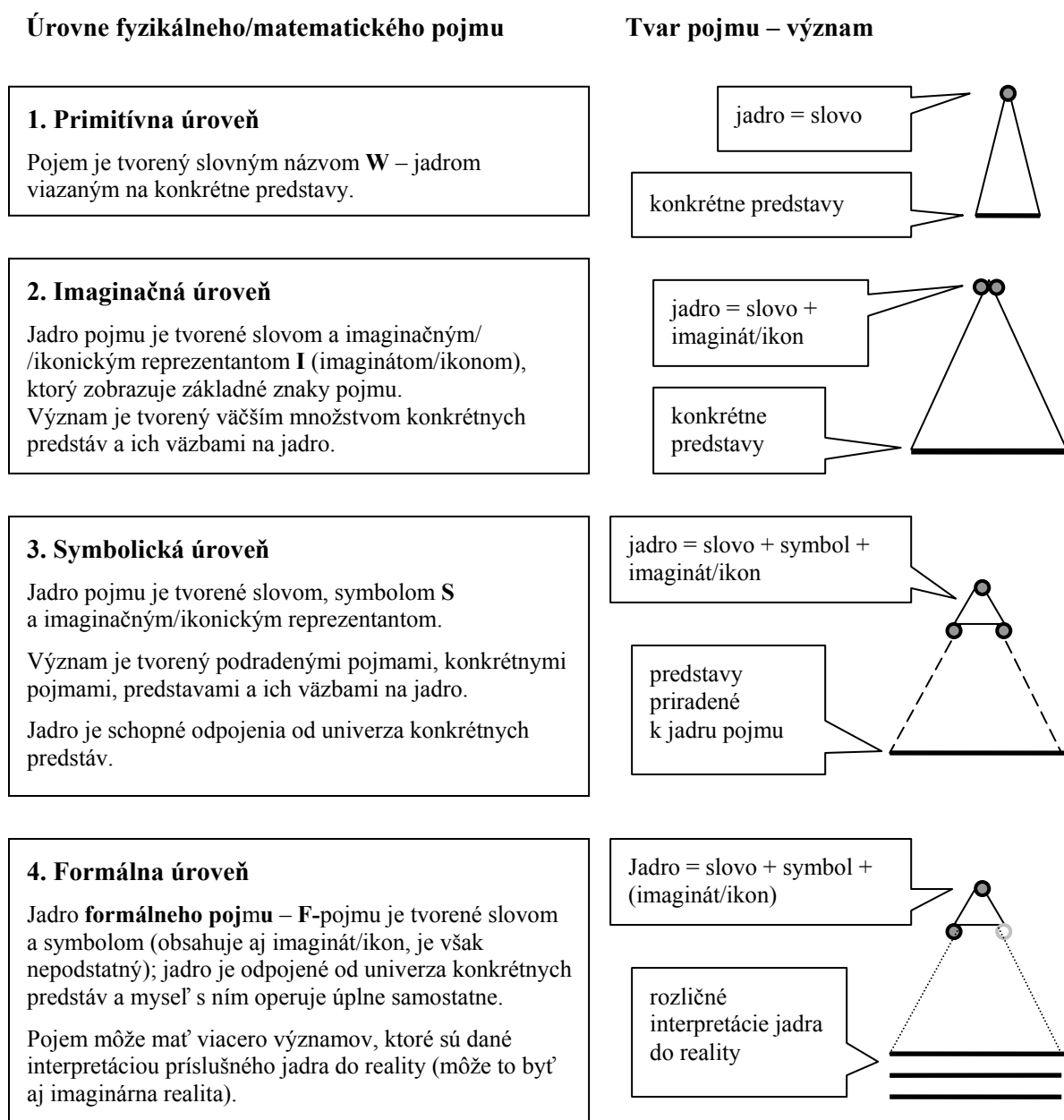
WISF–úrovne vývoja vedeckých pojmov

Vyššie popísané úrovne vývoja pojmov popisujú vývojové úrovne pojmov v rámci poznávacieho procesu vedy a súčasne možné vývojové úrovne vedeckých pojmov počas individuálneho poznávacieho procesu edukanta v rámci edukácie a učenia. Podľa začiatkových hlások termínov „Word concept“, „Image concept“, „Symbol concept“ a „Formal concept“ ich nazveme **WISF–úrovne vývoja pojmov** a proces ich vývoja **WISF–proces**.

1. **Primitívna** (obrazová) úroveň pojmov zodpovedá **primitívne-empirickej úrovni** pojmo-poznatkových systémov.
2. **Imaginačnú úroveň** dosahujú pojmy na **empirickej úrovni** pojmo-poznatkových systémov.
3. **Symbolickú úroveň** dosahujú pojmy na **parametricko-symbolickej úrovni** pojmo-poznatkových systémov a dotvára sa na **štrukturálnej úrovni**.
4. **Formálnu úroveň** môžu pojmy dosiahnuť už na **štrukturálnej úrovni** pojmo-poznatkových systémov, obvykle ju dosahujú až na **formálnej úrovni** pojmo-poznatkových systémov.

Schéma na obr. 3 ukazuje prehľadný popis WISF–vývojových úrovní matematických a fyzikálnych pojmov obsahujúci iba popisy jadra a významu.

Obr. 3: WISF–úrovne vývoja matematických a fyzikálnych pojmov v procese edukácie

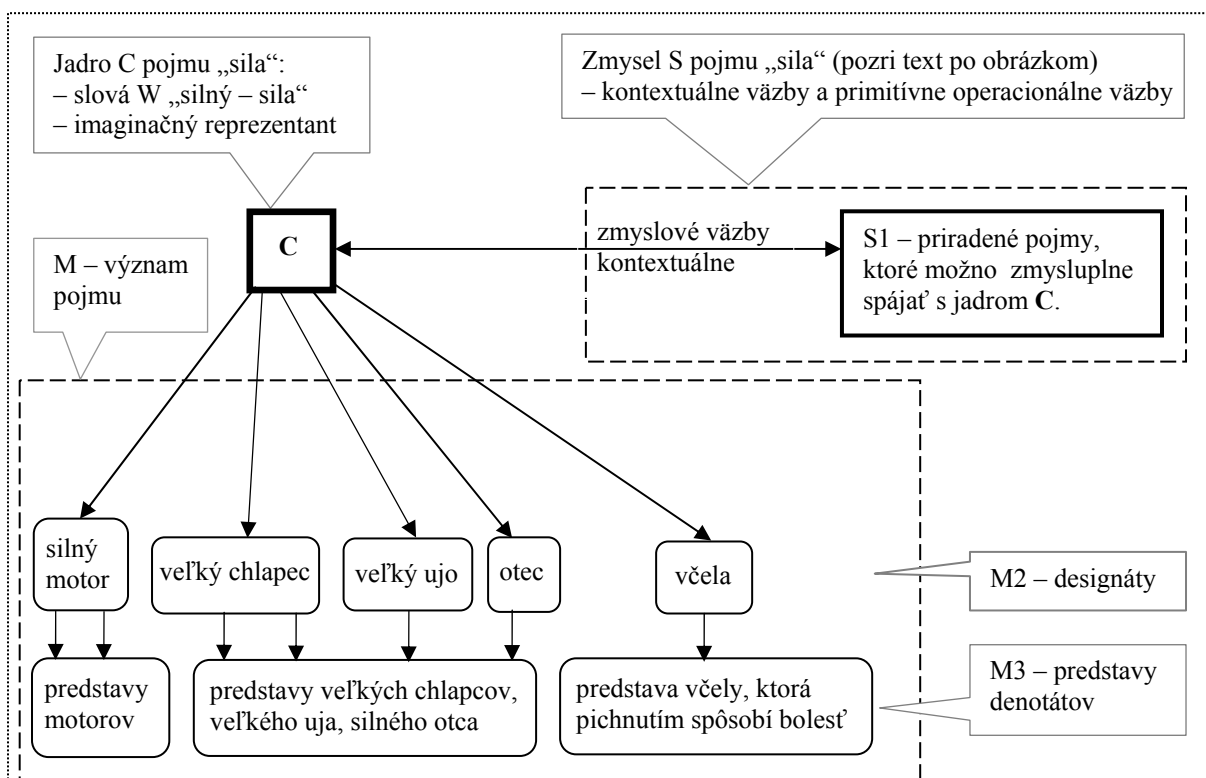


WISF–úrovne vývoja pojmu „sila“

1. **Primitívna úroveň** pojmu „sila“ sa vytvára na primitívne-empirickej úrovni pojmovo-poznatkového systému. Pojmy na tejto úrovni vychádzajú z konkrétnej empirickej skúsenosti dieťaťa a človeka pri pozorovaní javov alebo prežívani situácií, pri ktorých sú príslušné objekty či javy pomenované (dospelým, kamarátom, starším súrodencom,...). Deti na tejto úrovni väčšinou nevedeli priamo odpovedať na otázku, „Čo je to sila?“. Vedeli však odpovedať na otázku: „Kto je silný?“ – „veľký chlapec“, „motor auta“, „veľký ujo“, „otec“, „kôň“. Na otázku „Prečo je silný?“ odpovedali: „Ten chlapec, lebo ma bije (nepremôžem ho).“, „Otec ma zdvihne.“, „Auto je ťažké a motor ho ťahá. Ja ho neviem potlačiť.“ (Tarábek, 2007d).

Obr. 4.1: Trojuholníkový model komplexu „sila“ na primitívnej úrovni

Pravouhlé obdĺžniky (boxy) znázorňujú komponenty pojmovej štruktúry (C – jadro pojmu, množina S1); čiarkované obdĺžniky znázorňujú subsystémy (význam a zmysel), oválne obrazce znázorňujú designáty a predstavy denotátov, šípky znázorňujú väzby medzi prvkami pojmovej štruktúry, bodkovaný obdĺžnik znázorňuje celý pojem „sila“. Model znázorňuje pojem „sila“ formovaný ako nižší komplex.



Jadro C komplexu „sila“ je tvorené slovom „sila“ alebo „silný“ (alebo dvojicou „sila – silný“) a imaginatívnym reprezentantom – predstavou silného človeka alebo silného stroja, ktorý dokáže urobiť, posunúť to, čo slabý človek či dieťa – respondent nedokáže.

Zmysel S komplexu „sila – silný“ je tvorený:

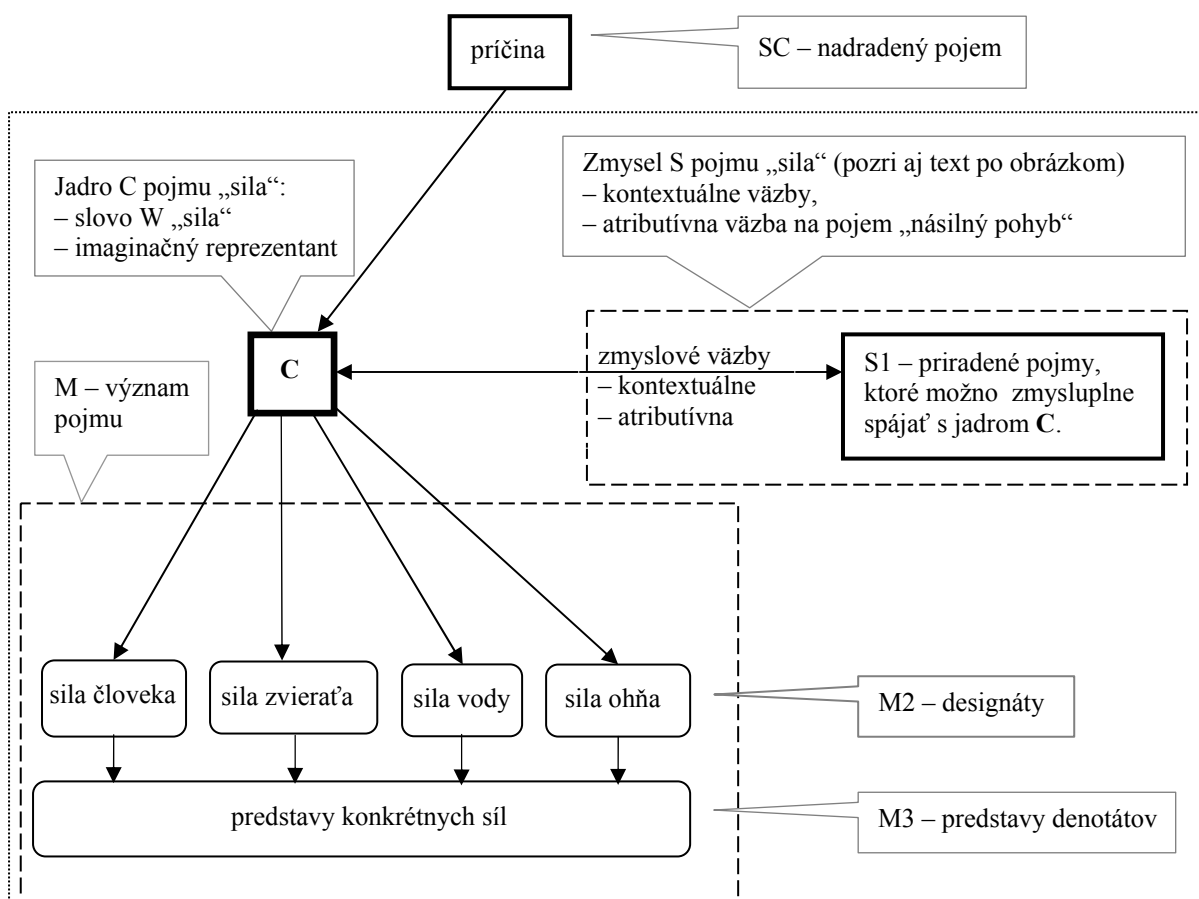
- kontextuálnymi väzbami na pojmy „ťažký“, „ťahat“, „tlačiť“, „dvíhať“, „pracovať“, „bit“ atď.,
- primitívnymi operacionálnymi väzbami na pojmy „slabý“, „veľký“, pretože deti „definujú“ napr. „Ujo je silný, lebo je veľký.“, „Otec je silný, lebo nie je slabý – zdvihne ťažký batoh.“

Vo význame M komplexu „sila – silný“ sú predmety, osoby, zvieratá reprezentujúce prejavy sily – pojem je chápaný ako vlastnosť človeka, zvieratá, stroja, ktorý urobí, tlačí, ťahá, zvihne, posúva niečo, čo dieťa nedokáže. Dokumentujú to napr. odpovede: „Silný je kôň, čo ťahá voz.“, „Motor (auta) je silný, lebo tlačí ťažké auto.“, „Silný je môj otec, ktorý ho (slabšieho chlapca) zbije za to, že mi vzal loptu.“, Vo význame sú aj nesprávne designáty súvisiace so strachom, bolesťou; deti napr. uvádzali aj odpovede „Silný je pes od susedov, lebo hryzie a bojím sa ho.“, „Slabá je mačička, tej sa nebojím.“, „Silná je včela. Pichla ma a bolelo ma to.“ (Tarábek, 2007d)

2. Imaginačná (empirická) úroveň pojmu „sila“ sa formuje na empirickej úrovni pojmovo-poznatkového systému. V priebehu školského vyučovania sa pojem sily formuje na druhom stupni základnej školy (grade 6, 7 and 8) obvykle ako komplex alebo pseudopojem. Ukážeme si plne vytvorený pojem sily na empirickej úrovni tak, ako ho chápal Aristoteles – tzv. aristotelovskú úroveň pojmu „sila“. Aristoteles v súvislosti z všeobecným princípom kauzality „všetko, čo sa pohybuje, musí byť pohybované hýbateľom – to kinoyon“, chápal silu ako príčinu pohybu a to násilného pohybu. Rozlišoval totiž pohyby prirodzené – napr. padanie ťažkých telies, dvíhanie sa ľahkých telies (dymu) a pohyby násilné – spôsobené človekom, zvierat'om, tlakom vody a pod. U Aristotela je pojem „sila“ plne formovaný (nie je to teda pseudopojem ani komplex) a jeho zákon sily je zo všeobecnením empirických skúseností, podľa ktorých sa pohybovali telesá len dovtedy, kým na ne pôsobila sila. Ak sila prestala pôsobiť, telesá sa postupne zastavili. Takéto chápanie sily je z hľadiska Newtonovej mechaniky nesprávne (u žiakov to nazývame miskoncepciou) a na odlišenie od správnej newtonovskej úrovne nazývame imaginačnú úroveň Aristotelovho pojmu „sila“ u aj **aristotelovskú úroveň** (Tarábek, 1988).

Obr. 4.2: Trojuholníkový model aristotelovského pojmu „sila“ na empirickej úrovni

Model znázorňuje plne formovaný pojem „sila“ u Aristotela. Pravouhlé obdĺžniky (boxy) znázorňujú komponenty pojmovej štruktúry (C – jadro pojmu, množina S1); čiarkované obdĺžniky znázorňujú subsystémy (význam a zmysel), oválne obrazce znázorňujú designáty a predstavy denotátov, šípky znázorňujú väzby medzi prvkami pojmovej štruktúry, bodkovaný obdĺžnik znázorňuje celý pojem „sila“.



Jadro C aristotelovského pojmu „sila“ je tvorené slovom „sila“ a imaginačným reprezentantom – predstavou sily ako príčiny násilného pohybu spôsobeného človekom, zvierat'om, prúdom vody a pod.

Zmysel S pojmu „sila – silný“ je tvorený:

- kontextuálnymi väzbami na pojmy „hýbať“, „ťahať“, „tlačiť“, „dvíhať“, atď.,
- atributívnou a súčasne operacionálnou väzbou na pojem „násilný pohyb“. V Aristotelovej definícii „**Sila je príčinou (násilného) pohybu.**“ je „príčina“ nadradeným pojmom a „násilný pohyb“ atribútom sily.

Význam M aristotelovského pojmu „sila“ je tvorený designátmi „sila človeka“, „sila zvierat'a“ atď a denotátmi – konkrétnymi prejavmi sily. Pre nedostatok znalostí o sile neobsahuje triedu referentov.

3.1 Symbolická úroveň pojmu „sila“ sa formuje na parametrickej úrovni pojmovo-poznatkového systému a v histórii fyziky sa to dialo počas obdobia tesne pred Newtonom a počas Newtonových objavov zákonitosti v klasickej mechanike. Pojem sily a priradené pojmy „trenie“, „odpor prostredia“, „dráha“, „rýchlosť“, „zrýchlenie“, „hmota“ museli prejsť procesom idealizácie, aby mohli z nich stať fyzikálne veličiny. Dráha telesa musela byť popísaná krivkou, teda jednorozmerným matematickým objektom. Zmena pohybu (resp. v súčasnej terminológii zmena pohybového stavu) bola indikovaná zmenou rýchlosti telesa teda zrýchlením, spomalením alebo zakrivením dráhy. Rýchlosť a zrýchlenie boli popísané matematickými definíciami. Hmota telesa bola daná jeho hmotnosťou ako fyzikálnou veličinou. Okrem toho známe javy – pohyby spomalené, rovnomerné a zrýchlené museli byť analyzované z hľadiska pôsobiacich síl. Muselo sa prísť na to, že spomaľovanie pohybu, potom, čo sila udržiavajúca teleso v pohybe, prestala pôsobiť, je spôsobené trením či odporom prostredia. Preto sa začali sily rozlišovať na sily uvádzajúce teleso do pohybu a sily brzdiace pohyb (trenie, odpor prostredia).

Analýza pohybov telies na naklonenej rovine a pri voľnom páde viedla Galilea Galileiho nielen k formulácii zákona voľného pádu ale aj k rozlíšeniu pohybov na zotrvačné – pohyb guľôčky na vodorovnej rovine bez trenia (aj pohyb nebeských telies po kružnici), zrýchlené – pohyb guľôčky na naklonenej rovine smerom nadol a spomalené – pohyb guľôčky na naklonenej rovine smerom nahor. Následne René Descartes definoval zotrvačný pohyb ako priamočiary a rovnomerný, ktorý je možný len vtedy, ak je odpor prostredia či trenie nulové. Súčasne si uvedomil, že časový účinok sily (t.j. impulz $F \cdot t$) je úmerný súčinu hmotnosti a rýchlosti (t.j. hybnosti $m \cdot v$). Vyvrátil teda Aristotelovo empirické zovšeobecnenie, že rýchlosť pohybu je úmerná pôsobiacej sile.

Newton potom rozšíril Galileiho predstavu zotrvačnosti na všetky pohyby bez pôsobenia sily a formuloval zákon zotrvačnosti. Odpor telesa proti zmene pohybu – jeho zotrvačnosť – sa v newtonovskom poňatí dal chápať ako zotrvačná fiktívna sila, ktorou sa teleso bráni tomu, aby pôsobiaca sila menila jeho pohybový stav. V niektorých prípadoch sa nám zotrvačná sila javí ako reálna, napr. ak autobus zrýchľuje alebo brzdí (vtedy cítime, ako nás zotrvačná sila hodí dozadu alebo dopredu). Rovnako sa nám zotrvačná sila javí ako reálna v otáčajúcich sa sústavách – na kolotoči, na centrifúge, v odstredivke. V nádvážnosti na to Newton správne pochopil silu ako príčinu zmeny pohybu (t.j. príčinu zmeny pohybového stavu alebo príčinu zrýchlenia, spomalenia a zakrivenia dráhy pohybu) a nie ako príčinu pohybu tak, ako ju chápal Aristoteles. Išlo o to, aká je matematická závislosť zmeny pohybu (t.j. zrýchlenia) od veľkosti a smeru pôsobiacej sily. Pre formulovanie hypotézy bolo potrebné analyzovať pohyby pod vplyvom rôznych síl (napr. síl uvádzajúcich teleso do pohybu a brzdných síl pôsobiacich proti pohybu), preto musel Newton pochopiť a formulovať zákon skladania síl. Newton potom správne predpokladal, že zmena rýchlosti, t.j. zrýchlenie je priamo úmerné veľkosti pôsobiacej sily ($a \sim F$) a deje sa v jej smere. Hmotnosť chápal Newton ako „veľkosť hmoty telesa“ – veličinu vyjadrujúcu nemenné mechanické vlastnosti telesa napr. jeho odpor proti zmene pohybu vplyvom pôsobiacej sily. Išlo len o to, akú matematickú závislosť má zmena pohybu (indikovaná zmenou rýchlosti) od hmotnosti telesa. Newton predpokladal, že je to nepriama úmernosť, t.j. zmena rýchlosti $a \sim 1/m$, čo sa pozorovaniami a experimentmi potvrdilo. Zložením oboch hypotéz bol formulovaný druhý Newtonov zákon $F = m \cdot a$. *3

Koncepcia sily v Newtonovej mechanike sa zásadne líši od koncepcie v Aristotelovej mechanike. Nazývame ju **newtonovská úroveň** pojmu sily – newtonovská koncepcia sily. Aby študenti mohli túto koncepciu pochopiť:

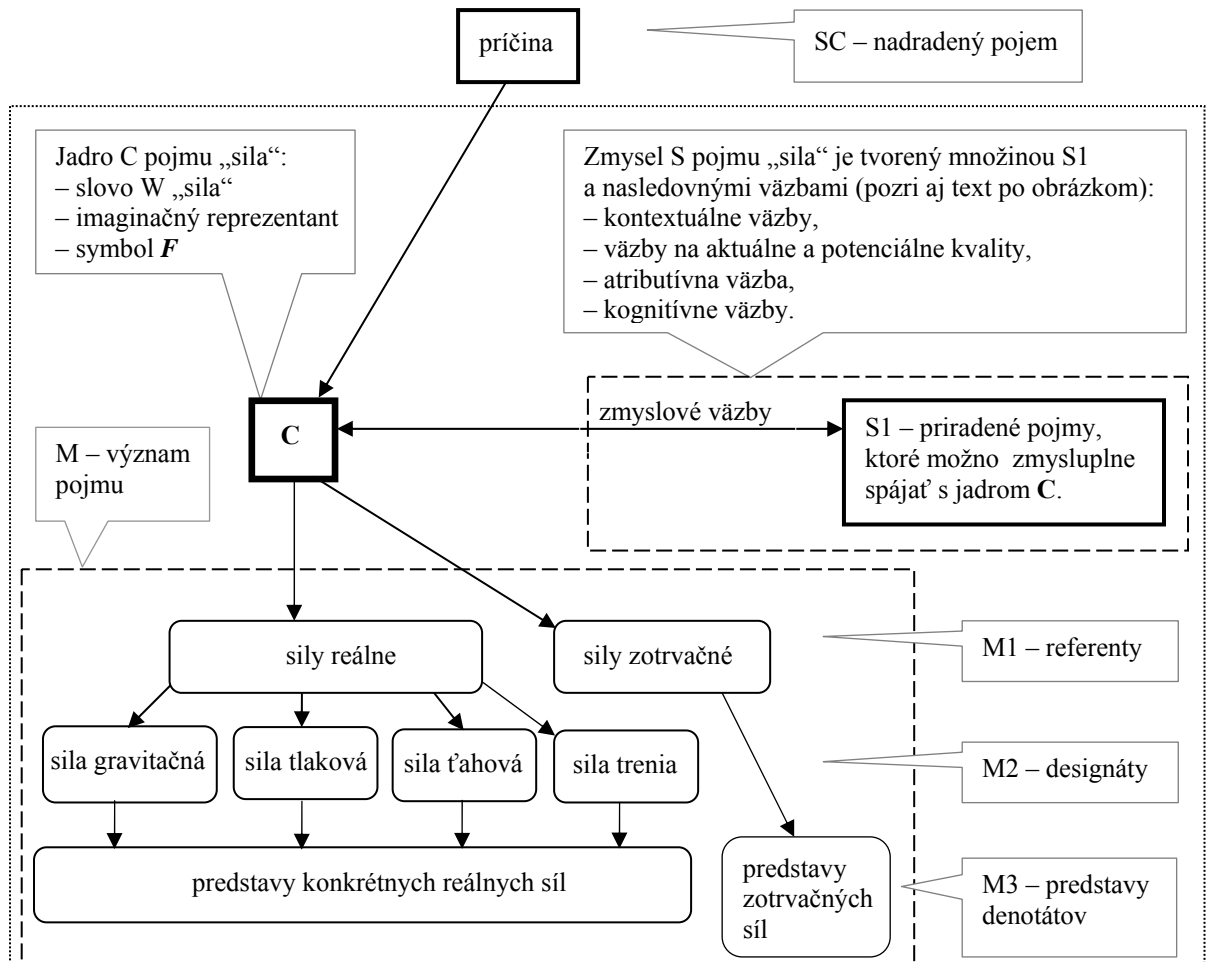
1. musia prejsť idealizačným procesom všetky ich ostatné pojmy súvisiace so silou (pozri obr. 4.3),
2. musia pochopiť zákon zotrvačnosti a podstatu zotrvačnej sily,
3. musia rozlíšiť sily na tie, ktoré uvádzajú teleso do pohybu a brzdné sily,
4. musia vedieť analyzovať pohyby telesa pod vplyvom síl uvádzajúcich do pohybu a síl brzdných,
5. musia teda poznať a pochopiť zákon skladania síl,
6. mali by si formulovať hypotézy o priamej úmernosti $a \sim F$ a nepriamej úmernosti $a \sim 1/m$,
7. mali by pochopiť, že zmena pohybu sa deje v smere pôsobiacej sily,
8. mali by si zostaviť II. Newtonov zákon na základe predchádzajúcich poznatkov.
9. Aby študenti pochopili, že hypotézy je potrebné aj overovať, možno im ukázať, ako bola hypotéza $F = m \cdot a$ testovaná vysvetlením na pohyboch nebeských telies, k čomu je potrebná znalosť Newtonovho gravitačného zákona a zákona akcie a reakcie.

Tento postup zabráni pretrvávaniu aristotelovskej miskoncepce v myslení študentov a vytvorí správnu newtonovskú úroveň pojmu sily ako aj dostatočné porozumenie zákonov Newtonovej mechaniky. Pretože je dosť náročný, v plnom rozsahu je vhodný až na gymnáziu v 10. ročníku školskej výučby. Kroky 2 až 6 môžu študenti absolvovať už na nižšom stupni školy (napr. 7. ročníku), pričom pôjde len o kvalitatívne úvahy a na ne nadväzujúce kvalitatívne poznatky.

*3 Popísaný postup modeluje vznik II. Newtonovho zákona na základe historickej analýzy.

Obr. 4.3: Trojuholníkový model newtonovského pojmu „sila“ na symbolickej úrovni

Model znázorňuje plne formovaný **newtonovský** pojem „sila“. Pravouhlé obdĺžniky (boxy) znázorňujú komponenty pojmovej štruktúry (C – jadro pojmu, množina S1); čiarkované obdĺžniky znázorňujú subsystemy (význam a zmysel), oválne obrazce znázorňujú designáty a predstavy denotátov, šípky znázorňujú väzby medzi prvkami pojmovej štruktúry, bodkovaný obdĺžnik znázorňuje celý pojem „sila“.



Jadro C newtonovského pojmu „sila“ je tvorené slovom „sila“, symbolom F a imaginačným reprezentantom – predstavou sily vyvolávajúcej zrýchlenie, spomalenie alebo zakrivenie dráhy pohybu.

Zmysel S pojmu „sila“ je tvorený:

- kontextuálnymi väzbami na pojmy „pohyb resp. pohybový stav“, „zmena“, „pôsobiť“, „pôsobenie“, „teleso“, „atď“.
- kvalitatívnymi väzbami na aktuálne kvality „veľkosť (sily)“, „smer (sily)“, „pôsobisko (sily)“, ktoré súvisia s faktom, že sila je fyzikálna veličina pôsobiaca na konkrétny fyzikálny objekt,
- potenciálnymi kvalitami „reálna t.j. gravitačná, tlaková, trenie, odpor prostredia“ a „zotrvačná“, ktoré delia silu na triedu referentov M1,
- atributívnou väzbou na pojem „zmena pohybového stavu“. V newtonovskom chápaní, ktoré možno pokladať za definíciu sily: „**Sila je príčinou zmeny pohybového stavu telesa.**“ je „príčina“ nadradeným pojmom a „zmena pohybového stavu“ atribútom sily.
- kognitívnymi väzbami „zrýchlenie či spomalenie telesa je úmerné pôsobiacej sile ($a \sim F$) a deje sa v smere jej pôsobenia“, „zrýchlenie či spomalenie telesa je nepriamo úmerné hmotnosti telesa“ ($a \sim 1/m$), danými II. Newtonovým zákonom $F = m \cdot a$, ako aj opačnou väzbou „sila vyvoláva zmenu pohybového stavu, t.j. $F \Rightarrow a$, kde a je vektorové zrýchlenie, ktoré môže znamenať zrýchlenie, spomalenie aj zakrivenie dráhy telesa“.

Význam M newtonovského pojmu „sila“ je tvorený rovinou M1 – referentmi „reálne sily“ a „zotrvačné sily“, rovinou M2 – designátmi „sila gravitačná“, „sila tlaková“, „sila ťahová“, „sila trenia“, „odpor prostredia“ event. „sila deformačná“ a denotátmi – konkrétnymi silami.

3.2 Symbolická úroveň pojmu „sila“ na štruktúrálnej úrovni pojmovo-poznatkového systému reprezentovaného mechanikou, elektromagnetizmom, jadrovou fyzikou a fyzikou elementárnych častíc sa líši od predchádzajúceho modelu na obr. 4.3. predovšetkým rozšíreným významom, ktorý ako **významové pole** má viaceré triedy referentov. S rozšíreným významom súvisí aj rozšírená množina väzieb na príslušné potenciálne kvality.

Hlavná trieda referentov je tvorená základnými fyzikálnymi interakciami – silami a to silou gravitačnou, elektromagnetickou, slabou interakciou a jadrovou silou (silnou interakciou).

V klasickej mechanike a elektromagnetizme rozlišujeme tieto triedy referentov:

sily reálne: pôsobiace na diaľku – gravitačné, elektrické, magnetické

a sily pôsobiace pri dotyku telies – dotykové, napr. tlaková, ťahová, sila trenia, odpor prostredia

a sily fiktívne: zotrvačná, odstredivá a Coriolisova sila.

V teoretickej mechanike rozlišujeme napr. vonkajšie sily pôsobiace na sústavu telies a vnútorné sily pôsobiace medzi telesami sústavy.

Ďalším rozdielom je zmena pojmu „sila“ na **pojmem primárny** bez nadradeného pojmu, čo je v súlade s koncepciou modernej fyziky, kde je sila definovaná fyzikálnym vzorcom (pozri 4. Formálna úroveň pojmu „sila“). V koncepcii modernej fyziky z konca 20. storočia sa sily pôsobiace na diaľku nahrádzajú pojmami **základné fyzikálne interakcie**.

V modeli na obr. 4.3 sú spomenuté len **pohybové účinky sily**. Okrem nich k atribútom sily patria aj **deformačné účinky sily**, s ktorými súvisia kognitívne väzby na veľkosť deformácie (Hookov zákon).

K atribútom sily patria aj pohybové účinky sily pri rotačných pohyboch, s ktorými je spojená operacionálna definícia momentu sily, účinky sily v kvapalinách a plynch, s ktorými je spojená operacionálna definícia tlaku. Súčasne s tým sa rozširuje trieda referentov o vztlakové sily pri plávaní telies a odporové sily pri obtekaní telies tekutinami.

4. Formálna úroveň pojmu „sila“ sa dosahuje na formálnej úrovni pojmovo-poznatkového systému reprezentovaného teoretickou mechanikou.

Zaradenie sily do súboru poznatkov a pojmov ukážeme na príklade gravitačného poľa veľkého telesa – napr. Zeme, na ktorú padá voľným pádom (smerujúc priamo k jej stredu) malé teleso s hmotnosťou m napr. meteoroid, ktorý ešte nedosiahol atmosféru, takže jeho pohyb nie je brzdený. Využijeme pritom iba znalosti stredoškolskej fyziky.

Kinetická energia padajúceho telesa $E = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ sa pri páde k Zemi stále zvyšuje ($v = g \cdot t$ je okamžitá rýchlosť pádu, g je gravitačné zrýchlenie, t je čas).

Dosadíme za v , potom energia $E = \frac{1}{2} m \cdot g^2 \cdot t^2 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \cdot mg = x \cdot mg$, kde $x = \frac{1}{2} g t^2$ je dráha voľného pádu (pozri Zmaturuj z fyziky).

Derivácia kinetickej energie podľa dráhy x je $dE/dx = m \cdot g$. Podľa druhého Newtonovho zákona na teleso zrýchľujúce so zrýchlením g pôsobí sila $F = m \cdot g$. Platí teda $dE/dx = F$.

Pretože podľa zákona zachovania energie musí byť súčet kinetickej E a potenciálnej energie W telesa konštantný, potenciálna energia W meteoroidu klesne presne o toľko, o koľko sa väčší jeho kinetická energia. Na teleso v gravitačnom poli teda pôsobí sila F , ktorá je rovná diferenciálnej zmene potenciálnej energie telesa (t.j. súčtinu gravitačného potenciálu a hmotnosti telesa) $F = -dW/dx$. Pretože derivácia dW/dx je záporná a sila F je kladná, musí byť vo vzorci znamienko mínus.

Na podobnom princípe je sila definovaná v teoretickej mechanike. V elektrickom a magnetickom poli je sila definovaná taktiež fyzikálnym vzorcom.

Sila vo formálnom pojmovo-poznatkovom systéme je teda formálnym pojmom definovaným pomocou iných pojmov operacionálnou definíciou. S inými pojmami napr. s intenzitou, potenciálom, hmotnosťou, zrýchlením a pod. je sila spojená zmyslovými väzbami pomocou fyzikálnych vzorcov a v pojmovo-poznatkovom systéme sa používa bez konkrétnej významovej interpretácie. Významovú interpretáciu sila dostáva až pri riešení konkrétnych prípadov.

5. Kognitívna analýza a trojuholníkové modelovanie štruktúry pojmov v kurikulárnom procese – vývojové miskoncepce

Trojuholníkové modelovanie sa môže používať ako jedna z metód didaktickej analýzy a syntézy predovšetkým pri transformácii T2 v priebehu didaktickej komunikácie pri tvorbe didaktického systému – zodpovedá tomu kurikulárna transformácia CT2 = konceptuálne kurikulum (conceptual curriculum) → zamýšľané kurikulum (intended curriculum) (Záškodný, 2007).

Trojuholníkové modelovanie možno využiť pri kognitívnej analýze interných pojmov u žiakov a študentov počas transformácie T4 vo vyučovaní a na zisťovanie kvality výstupov edukačného procesu – implementovaného kurikula a to:

1. na zisťovanie štruktúry a úrovne vstupných pojmov a prekonceptí edukantov,
2. na zisťovanie štruktúry a úrovne výstupných pojmov edukantov po ukončení danej etapy vyučovacieho procesu. Model je veľmi účinný pri odhaľovaní príčin vzniku miskonceptí, t.j. chybných vytvorených pojmov a poznatkov v priebehu školského vyučovania (Adamčíková, Tarábek 2007).

Postup v rámci kurikulárneho procesu je nasledovný:

1. Prvým krokom je kognitívna analýza externých pojmov, ktoré majú byť súčasťou učiva. Analyzujeme prvky štruktúry pojmu, pričom ako vzor slúži trojuholníkový model pojmu. Kognitívnu syntézou vytvoríme trojuholníkové modely, ktoré sa môžu líšiť v závislosti od Vygotského štádia formovania pojmu, od WISF-úrovne vývoja pojmu alebo aj v závislosti od etapy didaktickej komunikácie pojmu. Pri analýze hľadáme prvky trojuholníkového modelu a pri syntéze ich zoskupíme do modelu. V tomto kroku pre nedostatok alebo niekedy aj pre redundanciu informácií vybraných z externých PPS musíme využívať aj informácie o interných PPS z kognitívnych výskumov.
2. Po zistení štruktúry vybraného pojmu, jeho možných vývojových úrovní i možných foriem pre rôzne etapy didaktickej komunikácie sa v procese kognitívnej syntézy vytvárajú podľa vzoru trojuholníkového modelu konkrétne modely štruktúry pojmu primerané kognitívnej úrovni edukanta. Vytvorené modely sa overujú a upravujú podľa experimentálnych údajov z kognitívnych testov, z rozhovorov s respondentmi, prípadne z obrazových a grafických výtvorov edukantov.
3. V procese didaktickej syntézy sa konštruujú štruktúrne poznatkové jednotky (knowledge objects) ako prvky didaktického pojmového poznatkového systému – zamýšľaného kurikula. Do nich sa overené modely pojmov zapracovávajú.
4. Štruktúrne poznatkové jednotky sú podkladom pre tvorbu štruktúrnych jednotiek učiva (learning objects) počas transformácie T3 – kurikulárnej transformácie CT3 = zamýšľané kurikulum → projektové kurikulum *4.

*4 **Štruktúrne poznatkové jednotky** sú pojmovo-poznatkové mikrosystémy zahrňujúce relatívne samostatný kompaktný podsystém pojmov a poznatkov, ktorý je prvkom celého PPS. Po jeho transformácii na štruktúrnu jednotku učiva (learning object) ako súčasť učiva resp. textu v učebnici tvorí táto relatívne samostatnú časť s vlastným názvom, napr. v učebnici kapitoly, podkapitoly alebo akúkoľvek časť s vlastným názvom (Tarábek, 2007c). Pri maticovej metóde modelovania štruktúry učiva tvorí štruktúrna jednotka samostatnú mikromaticu (Záškodný, 2007).

Kognitívna analýza a modelovanie pojmu „sila“

Tento pojem a poznatky s ním spojené sa učia od 6. ročníka základnej školy prakticky až po štvrtý ročník štvorročného gymnázia.

Kognitívna analýza a trojuholníkové modelovanie pojmu „sila“ je popísané v kapitole 4 v časti **WISF-úrovne vývoja pojmu „sila“**. Analýza vývojových úrovní zistila dve odlišné úrovne vytvárania pojmu „sila“, ktoré boli zistené aj pri testovaní pojmov a poznatkov u žiakov základných škôl a gymnázií:

- **Aristotelovskú (starovekú) úroveň** pojmu „sila“ – popísanú na obr. 4.2, táto úroveň ako mentálna reprezentácia pojmu „sila“ a poznatkov s ním spojených v mysliach edukantov je **miskonceptiou**;
- **Newtonovskú úroveň** pojmu „sila“ – popísanú na str. 129, 130 a na obr. 4.3.

Na gymnáziách sa učí **symbolická úroveň** pojmu „sila“ na štruktúrálnej úrovni pojmového-poznatkového systému reprezentovaného mechanikou, elektromagnetizmom, jadrovou fyzikou a fyzikou elementárnych častíc, ktorá sa od newtonovskej úrovne líši iba rozsahom a absenciou nadradeného pojmu – detaily sú uvedené na str. 131.

V prácach Tarábek, 1988, 2005, Tarábková 1986, Butková, 1988 sú uvedené výsledky testov zameraných na zisťovanie aristotelovskej a newtonovskej úrovne. Ako príklad uvedieme výsledky dvoch úloh, ktoré najlepšie reprezentujú vývoj pojmu „sila“ počas vyučovacieho procesu na základnej a strednej škole.

Otázkou „Ako sa prejavuje pôsobenie sily na telesá?“ bola testovaná kognitívna väzba medzi silou a pohybom telesa.

Na newtonovskej úrovni má táto väzba tvar $F \Rightarrow a$, t.j. „sila vyvoláva zmenu pohybového stavu telesa (zrýchlenie, spomalenie alebo zakrivenie dráhy)“. Na aristotelovskej úrovni má táto väzba tvar $F \Rightarrow$ pohyb, t.j. „sila spôsobuje pohyb telesa“.

Stĺpec 6 – Odpovede boli zaradené do newtonovskej úrovne, ak obsahovali aspoň jednu zo zmien pohybového stavu: zrýchlenie, spomalenie, zakrivenie dráhy (posledná indikácia sa vyskytovala iba ojedinele).

Stĺpec 5 – Odpovede boli zaradené do aristotelovskej úrovne, ak obsahovali vyjadrenie $F \Rightarrow$ pohyb, popritom sa niekedy objavili aj vyjadrenia „pôsobenie sily sa prejavuje aj uvedením do pohybu“, „Telesá sa začnú pohybovať.“. Keďže žiaci v 7. ročníku základnej školy sa učia, že „sila má posuvné účinky – môže pohyb telesa urýchliť, spomaliť alebo zastaviť“ a študenti v 1. ročníku gymnázia sa výslovne učia „Výsledkom vzájomného silového pôsobenia telies môže byť alebo deformácia týchto telies alebo zmena ich pohybového stavu“, boli takéto odpovede vyhodnotené ako aristotelovské.

Stĺpec 4 – Samostatne boli vyhodnotené odpovede typu „pôsobenie sily sa prejavuje deformáciou telies“.

Stĺpec 3 – Ako nesprávne resp. neprimerané boli vyhodnotené tie odpovede, ktoré síce z fyzikálneho hľadiska mohli byť aj správnymi tvrdeniami, ale na otázku odpovedali nesprávne, napr. „sila pôsobí určitým tlakom“, „sila sa prejavuje prírastkom energie“, „telesá sa priťahujú a odpudzujú“.

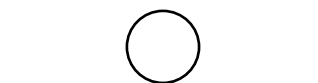
Stĺpec 2 – nulové odpovede – respondenti vôbec neodpovedali.

V stĺpci 1 je uvedený počet respondentov v danej vekovej skupine.

Číselné údaje vo všetkých stĺpcoch udávajú percentuálny podiel odpovedí z počtu respondentov uvedeného v stĺpci 1 a zaradených do príslušnej kategórie a vekovej skupiny. Stĺpec 1 udáva počet respondentov v konkrétnej vekovej skupine. Stĺpec 2 udáva percentuálny podiel nulových odpovedí (žiaci neodpovedali) a stĺpec 3 percentuálny podiel odpovedí nesprávnych alebo nezrozumiteľných, ktoré sa nedali z hľadiska zaradiť do stĺpcov 4, 5 a 6 vyhodnotiť.

číslo stĺpca	1	2	3	4	5	6
vek respondentov	počet resp.	nulová odpoveď	nesprávna odpoveď	odpoveď „deformáciou“	odpoveď na úrovni aristotelovskej	odpoveď na úrovni newtonovskej
žiaci 6. ročníka ZŠ	370	16,0 %	35,1 %	4,3 %	44,1 %	0,5 %
žiaci 7. ročníka ZŠ	307	13,7 %	12,4%	15,3%	54,4%	4,2 %
žiaci 8. ročníka ZŠ	264	10,6 %	8,7%	26,3%	51,0%	3,4 %
študenti 1. roč. gym.	209	7,6 %	2,5 %	2,9%	54,5 %	32,5 %
študenti 2. roč. gym.	221	4,4%	2,7 %	4,4%	63,4 %	25,3 %
študenti 3. roč. gym.	115	2,6 %	0,9 %	2,6%	65,2 %	28,7 %
študenti 4. roč. gym.	187	2,7 %	2,1 %	4,3%	63,6 %	27,3 %

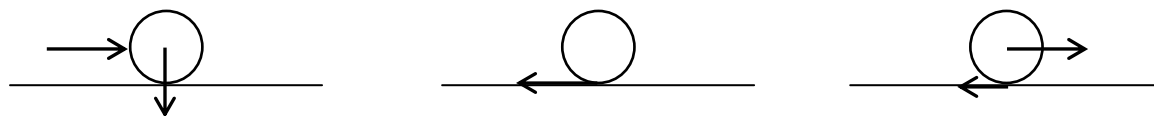
Úlohou „Dokreslite všetky pôsobiace sily na obrázku!“ bola testovaná kognitívna väzba medzi pohybom telesa a silou. Text k obrázku: Gulôčka sa kotúľa doprava po hladkej vodorovnej ploche rovnomerným priamočiarym pohybom.



Stĺpec 6 – Na newtonovskej úrovni študenti buď nakreslili iba ťiažovú silu F_g smerom dolu alebo silu F smerom doprava a rovnakú treciu silu F_t smerom doľava alebo obe možnosti. Sily často aj označili symbolmi.



Stĺpec 5 – Na aristotelovskej úrovni študenti nakreslili len silu v smere pohybu, len silu trenia alebo nakreslili obe sily ale rôzne veľké. Ak dokresľovali aj ťiažovú silu, nemalo to vplyv na zaradenie do tejto skupiny riešení.



Stĺpec 3 – Študenti do obrázku iba dopísali názov sily, napr. „zotrvačná sila“, „trecia sila“, „zotrvačnosť“.

Stĺpec 2 – Študenti úlohu nevyriešili – sily do obrázku nenakreslili ani nevpísali.

Číselné údaje vo všetkých stĺpcoch udávajú percentuálny podiel odpovedí z počtu respondentov uvedeného v stĺpci 1 a zaradených do príslušnej kategórie a vekovej skupiny. Stĺpec 1 udáva počet respondentov v konkrétnej vekovej skupine. Stĺpec 2 udáva percentuálny podiel nulových odpovedí (žiaci neodpovedali) a stĺpec 3 percentuálny podiel odpovedí nesprávnych alebo nezrozumiteľných, ktoré sa nedali z hľadiska zaradenie do stĺpcov 4, 5 a 6 vyhodnotiť.

číslo stĺpca	1	2	3	4	5	6
vek respondentov	počet resp.	nulová odpoveď	verbálna odpoveď		odpoveď na úrovni aristotelovskej	odpoveď na úrovni newtonovskej
žiaci 6. ročníka ZŠ	370	33,2 %	18,1 %		46,5 %	2,2 %
žiaci 7. ročníka ZŠ	307	20,8 %	24,8%		41,0%	13,4 %
žiaci 8. ročníka ZŠ	264	21,6 %	9,1%		61,7%	7,6 %
študenti 1. ročníka gymnázia	209	3,3 %	2,9 %		72,2 %	21,6 %
študenti 2. ročníka gymnázia	221	0,0%	2,7 %		67,8 %	29,5 %
študenti 3. ročníka gymnázia	115	2,6 %	1,8 %		67,8 %	27,8 %
študenti 4. ročníka gymnázia	187	2,1 %	0,6 %		86,1 %	11,2 %

Vývoj pojmu „sila“ – prechod z imaginačne–empirickej (aristotelovskej) úrovne na symbolickú (newtonovskú) úroveň

Vývojové trendy pojmu „sila“ a poznatkov s ním spojených by sa dali charakterizovať popri postupnom narastaní celkového objemu znalostí tým, že znalosti zodpovedajúce **aristotelovskej (starovekej) úrovni myslenia**, ktoré možno označiť ako **miskoncepcie**, neklesajú, ako by sa dalo očakávať, ale naopak rastú a výrazne prevažujú nad **správnymi znalosťami newtonovskej úrovne**. Podobné vývojové trendy boli zistené aj v riešeníach ďalších úloh (Tarábek, 1988) aj v iných prácach (Hejnová, 1984, Nachtigall, 1981), pričom miskoncepce tohto druhu boli napr. zistené aj v myslení 49% študentov učiteľských smerov (s jednou aprobáciou na fyziku) na MFF UK (Tarábek, 1988). Podobné výsledky týkajúce sa miskonceptíí študentov s fyzikálnym zameraním na začiatku univerzitného štúdia boli zistené aj v iných prácach (detaily v Adamčíková, Tarábek, 2007). Novšie výskumy miskonceptíí (Hestenes at all, 1992, Sharma, 2007) iba potvrdzujú, že situácia v tomto smere sa príliš nezmenila.

Aristotelovská úroveň myslenia v mechanike je prirodzená, pretože vychádza z bežnej skúsenosti človeka, ktorý pozorované javy zovšeobecňuje a vytvára si prvé primitívne empirické zákonitosti.

Prechod na **newtonovskú úroveň** ktorý je súčasne prechodom z empirickej na parametrickú až štruktúrálnu úroveň pojmo-poznatkového systému študenta si vyžaduje kvalitatívnu zmenu myslenia, pri ktorej pôvodné pojmy a poznatky musia prejsť komplexnou rekonštrukciou.

Aby sa v myslení študentov mohol vytvoriť plnohodnotný PPS na parametrickej úrovni, ktorý je v mechanike reprezentovaný newtonovskou koncepciou, je potrebné postupne realizovať viaceré myšlienkové kroky: Študenti

1. musia v pojmovej oblasti prejsť procesom idealizácie pojmov,
 2. musia pochopiť zákon zotrvačnosti a podstatu zotrvačnej sily ako sily zdanlivej v neinerciálnych sústavách,
 3. musia rozlíšiť sily na tie, ktoré uvádzajú teleso do pohybu a brzdné sily,
 4. musia vedieť analyzovať pohyby telesa pod vplyvom síl uvádzajúcich do pohybu a síl brzdných,
 5. v súvislosti s predchádzajúcim krokom musia poznať a pochopiť zákon skladania síl,
 6. mali by si formulovať hypotézy o priamej úmernosti $a \sim F$ a nepriamej úmernosti $a \sim 1/m$,
 7. mali by pochopiť, že zmena pohybu sa deje v smere pôsobiacej sily,
 8. mali by si zostaviť II. Newtonov zákon na základe predchádzajúcich poznatkov.
9. Aby študenti pochopili, že hypotézy je potrebné aj overovať, možno im ukázať, ako bola hypotéza $F = m \cdot a$ testovaná skúmaním a vysvetľovaním pohybov nebeských telies, k čomu je potrebná znalosť Newtonovho gravitačného zákona a zákona akcie a reakcie.

Pretože tento postup je dosť náročný, v plnom rozsahu je vhodný až na gymnáziu v 10. ročníku školskej výučby. Kroky 2 až 6 môžu študenti absolvovať už na nižšom stupni školy (napr. 7. ročníku), pričom pôjde len o kvalitatívne úvahy a na ne nadväzujúce kvalitatívne poznatky.

Vývoj fyzikálnych pojmov z hľadiska Vygotského štádií

V prácach Tarábek 1988, 2005, Tarábková 1986, Butková 1988, Mičuchová 1988 boli realizované testy, ktoré skúmali formovanie niektorých pojmov z hľadiska Vygotského štádií – komplexu a pseudopojmu, a to v priebehu štyroch rokov gymnázia. Výsledky pre termín „vodič elektrického prúdu“ sú uvedené v tabuľke 1 na str. 114, ďalšie výsledky pre fyzikálne pojmy elektrický prúd a sila sú v dodatku 1 na str. 142. Boli skúmané aj ďalšie pojmy (napätie, zotrvačnosť, tretia sila).

Ukázalo sa, že i keď percentuálny podiel nulových a úplne nesprávnych odpovedí s vekom respondentov klesá, podiel komplexného štádia pojmu v priebehu štyroch ročníkov gymnaziálneho vyučovania sa príliš nemení (niekedy narastá, niekedy klesá, niekedy je zmena nevýrazná). Podiel štádia pseudopojmu má tendenciu rásť, nie však vo všetkých prípadoch. Zarážajúci však bol percentuálny podiel plne formovaných pojmov. Nezávisle na tom, aký pojem bol skúmaný, štádium plne formovaného pojmu dosahovalo v poslednom ročníku gymnázia rádovo percentá (okrem pojmu „vodič elektrického prúdu“ – 12%). Znamená to, že vyučovanie má síce pozitívny vplyv na budovanie pojmov, avšak väčšina študentov opúšťa strednú školu s fyzikálnymi pojmi, ktoré sú na úrovni komplexu až pseudopojmu, teda neúplného štádia pojmu.

Možno konštatovať, že **vývoj pojmov zákonite prebieha Vygotského štádiami**. Preto komplexy a pseudopojmy nie sú nedostatkom v pojmovom myslení, ak sú len prechodnými štádiami. Ak sú však konečnými etapami vývoja pojmu (čo u časti absolventov gymnázia možno predpokladať), potom sú **pojmovými miskoncepciami**.

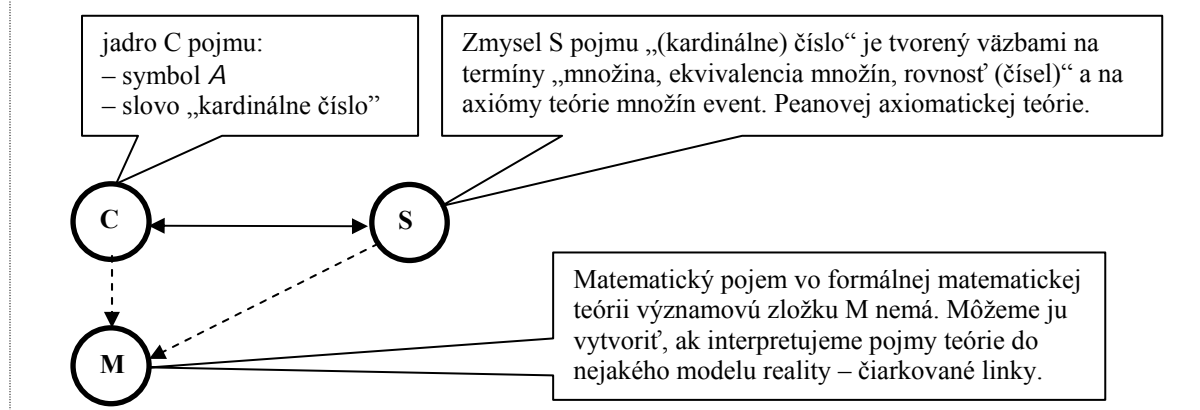
Riešenie problému pojmových miskoncepcií si vyžaduje kognitívnu analýzu kľúčových pojmov učiva, ktoré sú obvykle na vyššej úrovni abstrakcie a náročnejšie na osvojenie. Následné postupy riešenia problému zatiaľ neboli realizované a budú predmetom ďalších štúdií.

Kognitívna analýza a modelovanie pojmu čísla

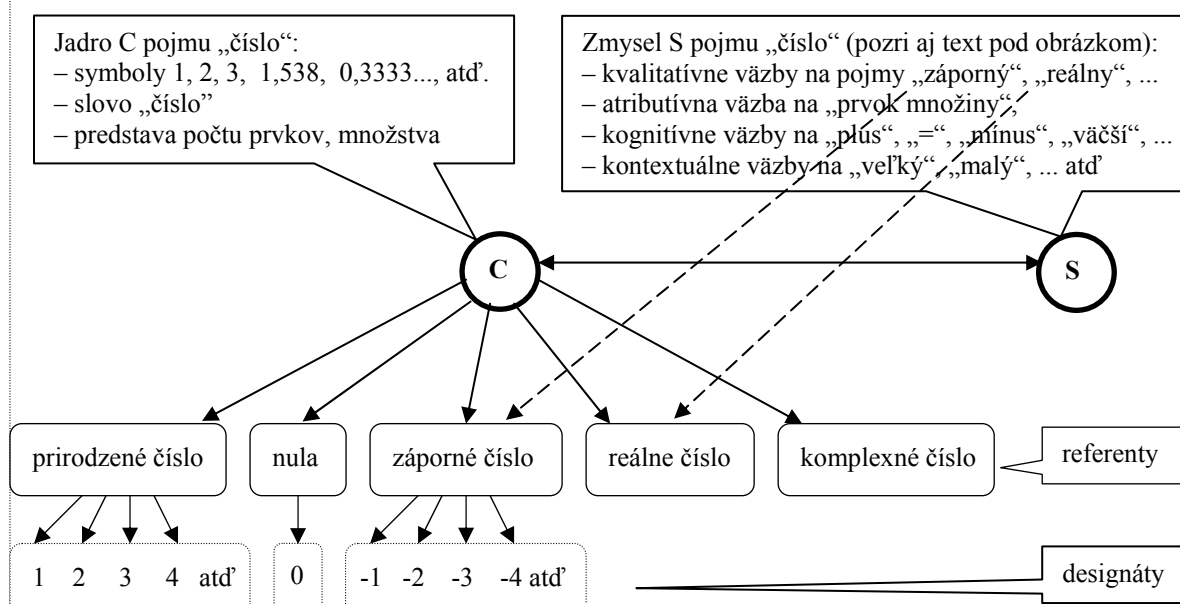
Pojem číslo sa začína učiť v prvom ročníku základnej školy, pričom deti do školy vstupujú už z istou predstavou, ktorá môže byť viac či menej adekvátne. Rozsah tohto pojmu sa potom rozširuje prakticky počas celého štúdia na základnej a strednej škole. Napriek zdanlivej jednoduchosti pojmu „číslo“ sa v ňom a v pojmoch s ním spojených skrývajú úskalia, ktoré zakladajú vytváranie miskoncepcií nielen pojmu čísla ale aj pojmov s ním spojených. Preto tu ukážeme postupy kognitívnej analýzy a modelovania aj na pojme čísla a súčasne v rámci didaktickej analýzy ukážeme príčiny vzniku miskoncepcií.

Ako **prvý krok** urobíme analýzu externého pojmu. V odbornej, didaktickej a učebnicovej literatúre nájdeme definície, či vysvetlenia prirodzeného čísla (pozri citácie C01 až C10 v dodatku 2) a syntézou vytvoríme trojuholníkové modely, ktoré sa môžu líšiť v závislosti od etapy **didaktickej komunikácie pojmu** (Adamčíková, Tarábek, 2007). Pri analýze hľadáme prvky trojuholníkového modelu a pri syntéze ich zoskupíme do modelu.

Obr. 5.1 Trojuholníkový model vedeckého pojmu „číslo“ – fáza F0 didaktickej komunikácie – štruktúra pojmu zodpovedá formálnej úrovni vývoja pojmov (pozri obr.3)



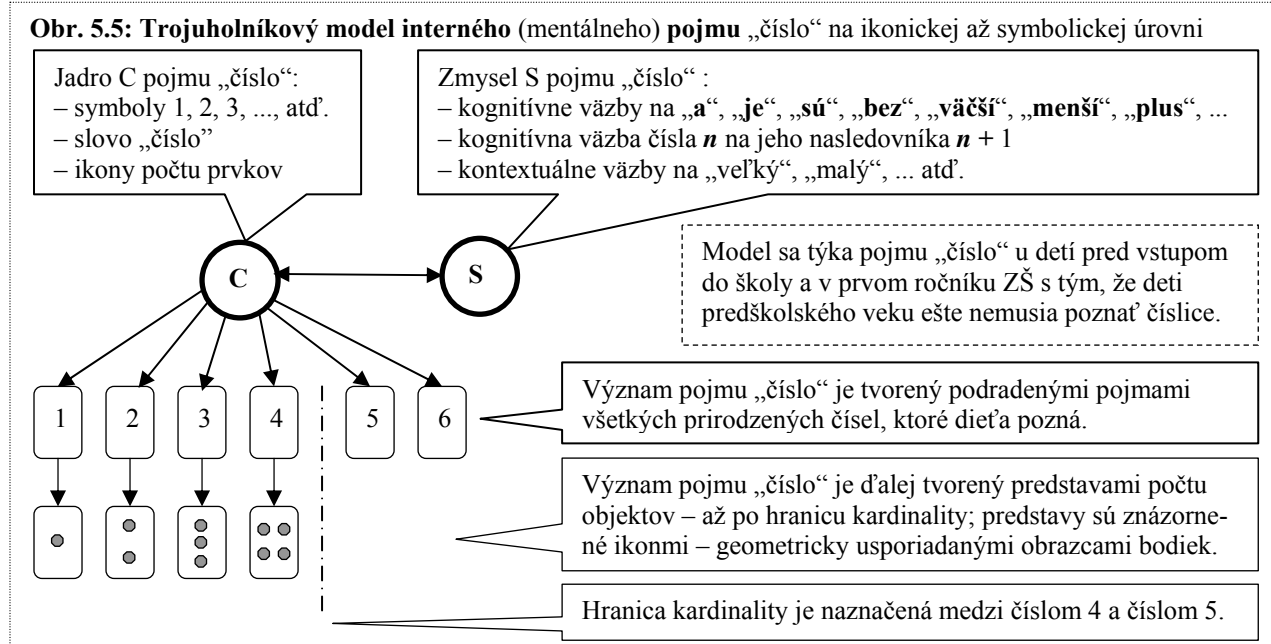
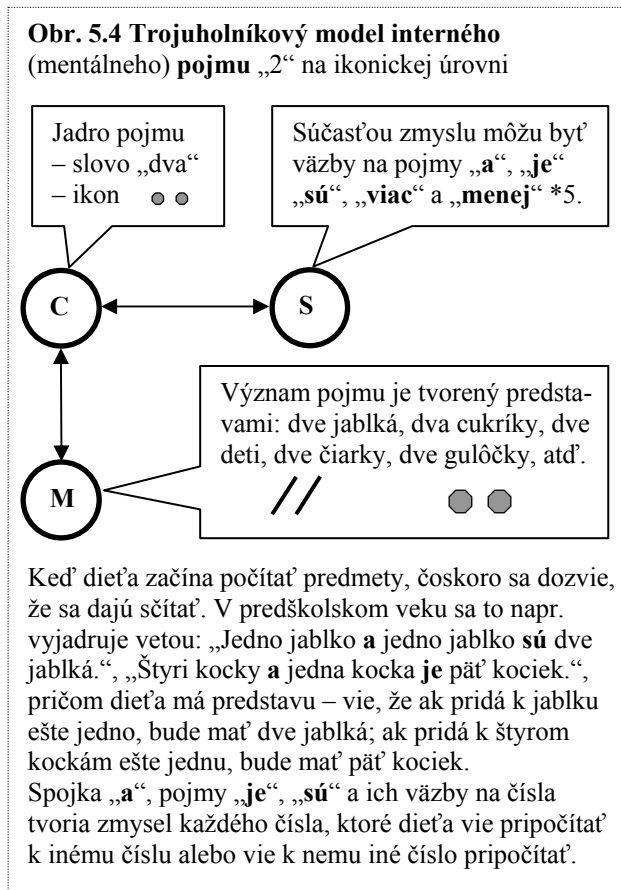
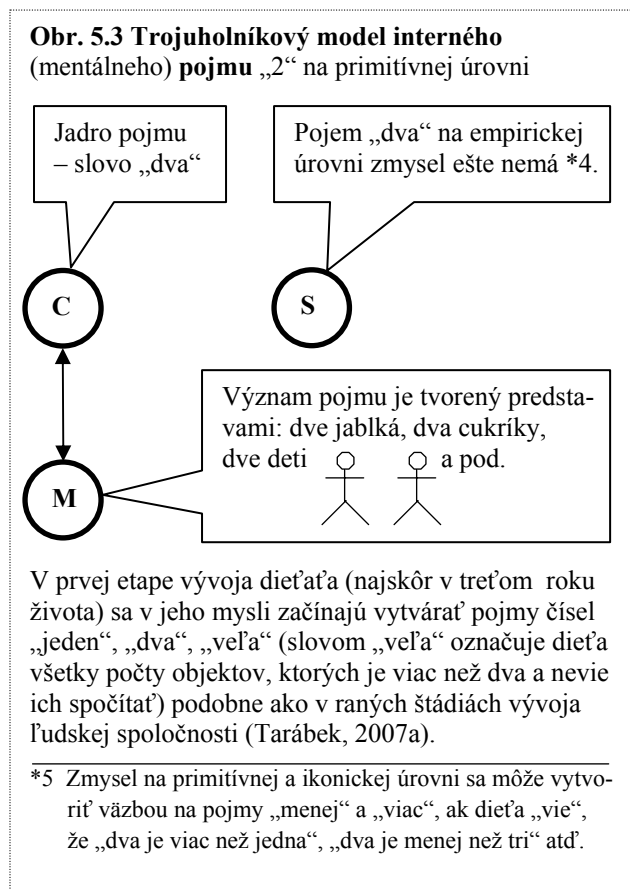
Obr. 5.2 Trojuholníkový model externého pojmu „číslo“ vo fáze F1 didaktickej komunikácie – štruktúra pojmu zodpovedá symbolickej úrovni vývoja pojmov (pozri obr.3)



Zmysel S pojmu „číslo“ vo fáze F1 didaktickej komunikácie je tvorený:

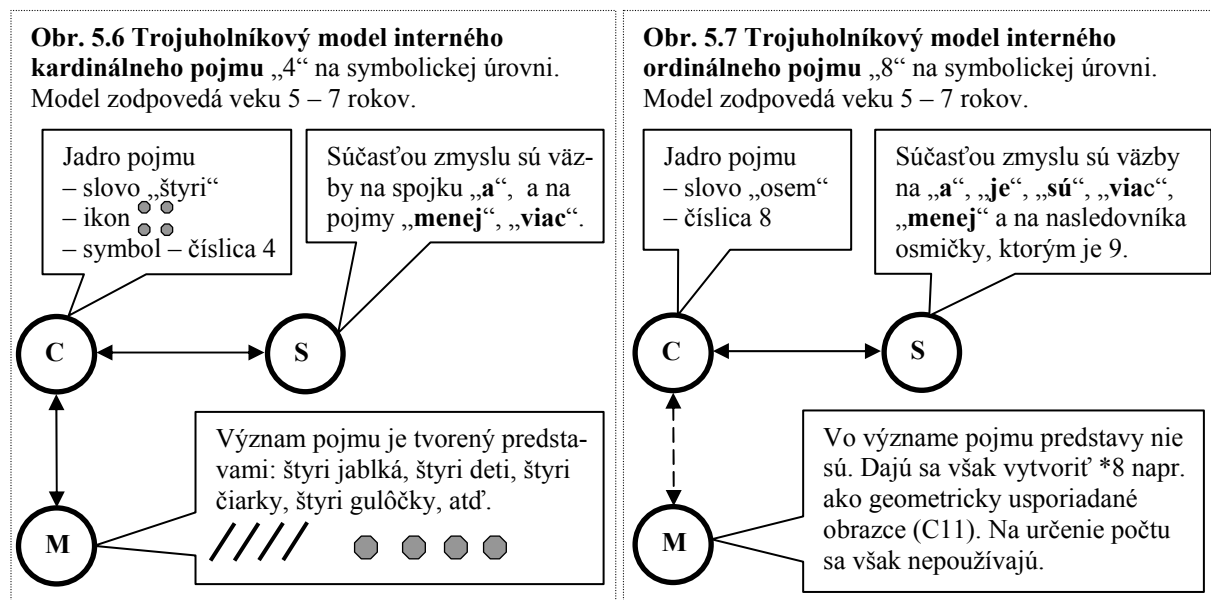
- aktuálnou kvalitatívnou väzbou na termín „číslica“. Číslo sa dá vyjadriť číslicami.
- kvalitatívnymi väzbami na potenciálne kvality – termíny „prirodzený, nula, záporný, reálny a pod.“; ktoré rozdeľia množinu čísel na čísla prirodzené, nulu, čísla záporné, celé, racionálne, reálne, komplexné a pod.
- atributívnou väzbou na termín „počet prvkov množiny“, ak uvažujeme prirodzené čísla. V definícii „Číslo vyjadruje počet prvkov množiny.“ je pojem „počet“ nadradený. Pre ostatné čísla by to azda mohol byť pojem „mohutnosť množiny“.
- kognitívnymi väzbami čísel na pojmy „nasledovník“, „sčítanie“, „plus (+)“, „rovná sa (=)“, „odčítanie“, „mínus“, „násobenie“, „krát“, „väčší“, „menší“ atď. Tieto pojmy v sebe obsahujú zakódované pravidlá matematických operácií s číslami. Napr. kognitívne väzby čísel na „+“ a na „=“ znamenajú, že pri zadaní dvoch konkrétnych čísel, ktoré treba sčítať, vieme na tieto čísla použiť primeranú operáciu, ktorou dosiahneme výsledok – súčet. Ak máme sčítať 8 a 5, vieme, že k číslu 8 musíme pridať 5 (nie 5 odobrať alebo ho ním násobiť), resp. za zápisom „8 + 5“ nasleduje „=“ a za tým výsledok, t.j. 8 + 5 = 13.
- kontextuálnymi väzbami na pojmy „veľký“, „malý“, „štatistický“, „myslieť“, „písať“ a pod., pretože môžeme povedať: „veľké čísla“, „štatistické číslo“, „Mysli si číslo!“, „Napiš číslo tri!“

Druhý krok: Pojem „číslo“ je súčasťou obsahu učiva v prvom ročníku ZŠ – poznávanie čísel, číselníkov a počítanie. Model externého pojmu „číslo“ pre 1. ročník ZŠ zodpovedajúci fáze F2 sa vytvára v rámci transformácie T2 (tvorba didaktického systému), pri ktorej sa prispôsobuje vedecký pojmovo-poznatkový systém kognitívnej úrovni žiaka (Adamčíková, Tarábek, 2007). Preto bude tento model závisieť od toho, akú kognitívnu úroveň môže dosiahnuť pojem „číslo“ u žiakov vekovej kategórie 5 – 7 rokov. Musíme teda vedieť, ako vyzerá štruktúra interného pojmu „číslo“ príslušnej vekovej kategórie detí a poznať predchádzajúci vývoj tohto pojmu. Štruktúru pojmu „prirodzené číslo“ u detí predškolského veku a v 1.ročníku ZŠ ukážeme nasledovnými modelmi na obr. 5.3, 5.4, 5.5.



Keď sú deti schopné vytvárať si pojmy vyjadrujúce aj väčšie počty objektov, objavujú sa dva spôsoby budovania číselných pojmov:

1. Význam menších čísel je tvorený predstavami počtu prvkov – dieťa si vie predstaviť jeden, dva, tri, štyri či päť predmetov. Pomáha si pri tom napr. prstami, ktoré sa stávajú akýmsi vzorom – imaginátnym reprezentantom (imaginátom). Imaginát umožňuje porovnať počet predmetov s počtom prstov. Dieťa si môže (napr. vplyvom školského vyučovania) vytvoriť aj ikon – štylizovanú predstavu počtu vyjadrenú napr. geometricky usporiadanými bodkami (obr. 5.3, 5.4, iné formy ikonov sú v dodatku – citácii C11). Pojmy konkrétneho čísla, ktoré majú vo význame predstavu určitého počtu, sú pojmy s kardinálnou dimenziou – zjednodušene povedané **kardinálne pojmy** *6 (obr. 5.6).
 2. Dieťa si však ťažko predstavuje počet vyšší než určité číslo. Číslo, ktoré si dieťa už nevie predstaviť, je za **hranicou kardinality** a potom si dieťa pomáha inak. Do pamäti si uloží usporiadanú postupnosť názvov čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, neskoršie aj názvov čísel od 11 do 20. Viac nepotrebuje, ak (neskoršie) pochopí pravidlá pre usporiadanie čísel nad dvadsať. Potom počet prvkov nejakej množiny (počet predmetov, ktoré má spočítať) neurčuje pohľadom na množinu a porovnaním so vzorom (imaginátom) či ikonom *7, ale postupom, pri ktorom si na predmety ukazuje prstom a ráta ich. Napr. počet „deväť cukríkov“ určí tak, že si na ne ukazuje a ráta „jeden, dva tri, štyri, päť, šesť, sedem, osem, deväť“.
- Pojem vyššieho čísla n má potom vo svojom zmysle väzbu na svojho nasledovníka $n + 1$. Priradenie čísla určitému počtu objektov dieťa vykoná pomocou operácie rátania od 1 založenej na usporiadanej postupnosti čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Takýto pojem čísla je pojem s ordinálnou dimenziou, zjednodušene povedané **pojem ordinálny** *6 (obr. 5.7). Ordinálny pojem čísla nemá vo svojom význame predstavy počtu, v jadre nie je imaginát, ani ikon. Jadro je tvorené iba slovom – názvom čísla, prípadne aj symbolom – číslicou.



Kardinálna a ordinálna dimenzia pojmu číslo

Pojem „číslo“ má **kardinálnu dimenziu**, ak v jadre pojmu je imaginát/ikon reprezentujúci počet, ktorý toto číslo vyjadruje. Vo význame sú predstavy počtu rôznych objektov.

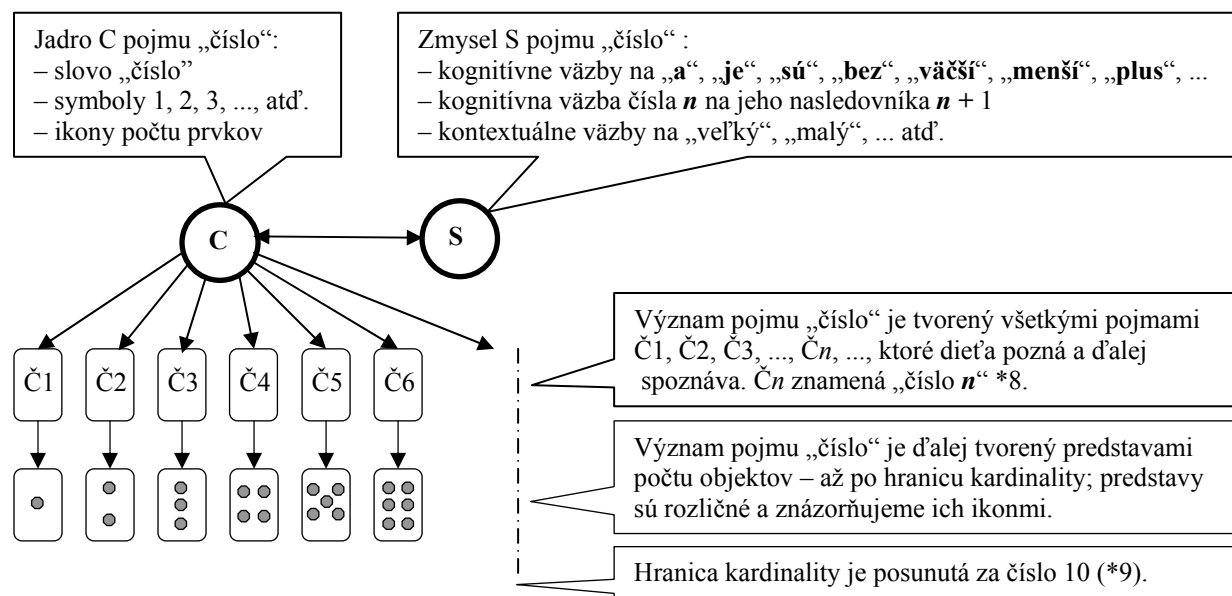
Pojem „číslo“ má **ordinálnu dimenziu**, ak je v zmysle pojmu čísla n väzba na jeho nasledovníka $n + 1$.

Kardinálny pojem čísla má iba kardinálnu dimenziu, **ordinálny pojem** má iba ordinálnu dimenziu. **Hranica kardinality** je medzi číslom, ktoré si dieťa ešte vie predstaviť a číslom, ktoré si nevie predstaviť.

Modely na obrázkoch 5.3 až 5.7 vytvárame počas transformácie T2 v priebehu didaktickej komunikácie pojmu.

Potom nasleduje **tretí krok** – vytvorenie modelu externého pojmu „číslo“, ktorý ako poznatková štruktúrna jednotka (knowledge object) bude podkladom pre tvorbu učiva v prvom ročníku ZŠ (fáza F2 didaktickej komunikácie).

Obr. 5.8 Trojuholníkový model externého pojmu „číslo“ na symbolickej úrovni vo fáze F2 didaktickej komunikácie, ako podklad pre vyučovanie a tvorbu učiva matematiky na začiatku 1. ročníka základnej školy.



*8 Dieťa na začiatku 1. ročníka ZŠ nepozná, ani sa nepotrebuje učiť termín „prirodzené čísla“. Pod slovo číslo zaraďuje pojmy „číslo 1“, „číslo 2“, ..., „číslo 10“, „číslo 15“, ..., „číslo 20“, prípadne ďalšie čísla, o ktorých vie, že existujú, ale nemusí poznať ich presný zápis. Pod slovo „číslo“ zaraďuje entity, ktoré vyjadrujú počet niečoho.

*9 Predstavy čísel možno budovať pomocou znázorňovania čísel geometrickými obrazcami (pozri citáciu C11), čím sa hranica kardinality posúva nahor.

*6 Názov je odvodený z terminov „kardinálne číslo“ a „ordinálne číslo“, citácie C06, C09, C10.

*7 Určovanie počtu prvkov nejakej množiny porovnaním so vzorom – ikonou (napr. geometricky usporiadanými bodkami) či imaginátom (napr. prstami na ruke) je prakticky nemožné, ak prvky množiny nie sú tak neusporiadané, ako prvky ikonu či imaginátu. Preto ľudstvo oddávna používa účinnejší spôsob – rátať, ktorý využíva ordinálnu dimenziu čísla. Samozrejme, pokiaľ dieťa nemá usporiadanú postupnosť názvov čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, atď. pevne zafixovanú v pamäti, mylí sa a danému počtu predmetov priradí nesprávne číslo.

*9 V praxi si človek vytvára význam ordinálnych čísel pomocou modelov: číselná os, bankovky vyjadrujúce určité sumy peňazí, obrazce vytvorené zo štvorčekov reprezentujúcich desiatky (stovky, tisícky atď.) vytvárajú predstavy veľkých čísel, špecifické modelové predstavy – veľkosti známych objektov (dieťaťa, človeka, auta, budovy a pod.), rýchlosti určitých objektov (chôdza človeka, rýchlosť bicykla, auta, lietadla) atď. Tým získavajú ordinálne pojmy čísla aj kardinálnu dimenziu, ktorú človek potrebuje v praxi, napr. keď chodec odhaduje rýchlosť auta a jeho vzdialenosť pred prechádzaním cez cestu, keď vodič potrebuje brzdiť pred prekážkou; keď chlapec odhaduje hĺbku, do ktorej chce skočiť a pod.

Ordinálny model bez kardinálnej dimenzie zlyháva pri vysokých číslach. Prejavuje sa to chybami vo výpočtoch, ktoré žiak „nevidí“. Má napr. z rýchlosti lietadla a doby letu vypočítať vzdialenosť z Bratislavy do New Yorku a vyjde mu 683 700 kilometrov namiesto 6 837 km, pretože sa pri výpočte pomýlil o dva rády pri premene jednotiek (praktická skúsenosť získaná pri vyučovaní). Žiak si túto chybu neuvedomí, pretože nemá nijakú predstavu čísel 7 000 km a 700 000 km, teda jeho pojem čísla 7 000 ani 700 000 nemá kardinálnu dimenziu. Tieto predstavy sa vytvárajú pomocou známych vzdialeností, napr. priama vzdialenosť z Bratislavy do Viedne je asi 60 km, do Prahy asi 300 km, priemer Zeme je asi 12 700 km, obvod Zeme asi 40 000 km, vzdialenosť Zeme k Mesiacu asi 380 000 km. Takže ak má žiak vytvorený kardinálnu dimenziu veľkých čísel pomocou predstáv a porovnávaní známych vzdialeností a veľkostí predmetov, vie odhadnúť, či je jeho výsledok aspoň rádovo správny alebo nie. Kardinálnu dimenziu čísel musí mať každý odborník, ktorý vypočítava rozmery predmetov; architekt (aby vedel, že ak mu vyjde priemer nosného stĺpu 3 cm, je to málo – má byť 30 cm), technik (aby vedel, že hrúbka steny kontajnera na naftu musí byť 9 mm a nie 0,9 mm), a pod. Vážnym nedostatkom školských úloh je napríklad skutočnosť, že neučia žiakov odhadovať výsledok na základe rádových predstáv o výsledku, ktorý súvisí s ordinálnou dimenziou čísla.

Využitie trojuholníkového modelovania pojmu čísla pri tvorbe učiva a vo vyučovaní matematiky.

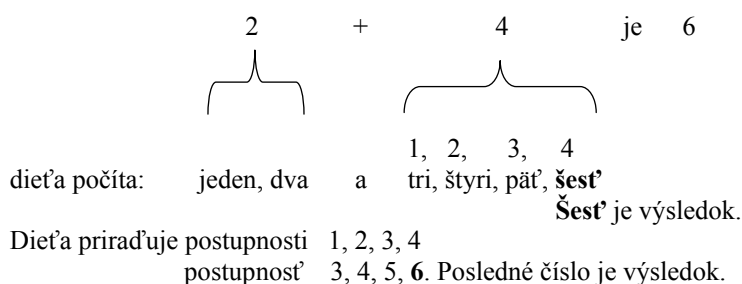
Trojuholníkové modelovanie sa môže používať ako jedna z metód didaktickej analýzy a syntézy pri transformácii T2 v priebehu didaktickej komunikácie. Rovnako ho môžeme využiť v rámci vyučovacieho procesu na zisťovanie štruktúry interných pojmov u žiakov. Veľmi účinné je pri odhaľovaní príčin vzniku miskoncepcií, t.j. chybné vytvorených pojmov a poznatkov v priebehu školského vyučovania (Adamčíková, Tarábek 2007). Miskoncepciou je napríklad neúplne vytvorený význam pojmu „rovná sa (=)“. Autor zistil v rámci vyučovania žiakov 2. stupňa ZŠ, že ich pojem „=“ má neúplne a nesprávne vytvorený význam a chýba mu zmysel. Žiaci chápali „=“ ako znak, za ktorý sa píše výsledok matematickej operácie a ďalej ako znak, ktorý kladieme medzi matematické výrazy, ak ich upravujeme. Podobný význam tohto pojmu majú aj žiaci 1. ročníka: „Za to = píšeme to, čo nám vyjde. Chce to od nás pani učiteľka.“ Pre deti je to iba značka, za ktorú majú napísať výsledok počítania (Tarábek, 2007a). Zdá sa, že žiakom a ale aj študentom stredných škôl chýba správny význam pojmu „rovná sa (=)“ * 10.

Keďže dieťa pri vstupe do školy ešte nemá vytvorený pojem „rovná sa (=)“, v modeli externého pojmu na obr. 5.8 zmyslová kognitívna väzba čísel na „=“ nie je a dieťa ju ani nepotrebuje.

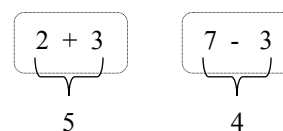
Na zvládnutie sčítania a odčítania stačia dieťaťu väzby číselných pojmov na „a“, „plus“, „bez“ (prípadne aj na „mínus“), „je“ a „sú“, ktoré pre dieťa znamenajú, že pri sčítaní sa slovko „a“ resp. „plus“ viaže za prvé číslo, potom nasleduje číslo, ktoré pričítame a operáciou naznačenou na obr. 6.1 získame výsledok, ktorý vyjadríme vetou: „Prvé číslo plus druhé číslo je výsledok.“ Zmysel pojmu „a“ resp. „plus“ je nasledovný: k prvému číslu pridaj (pripočítaj) druhé (ktoré je za „a“ resp. za „plus“). Zmysel pojmu „bez“ resp. „mínus“ je nasledovný: od prvého čísla odober (odpočítaj) druhé (ktoré je za „bez“ resp. za „mínus“). Zmysel pojmu „sú“ resp. „je“: je to slovo, za ktorým vo vete zaradíme výsledok sčítania (nemá význam rovnosti).

Postupne si dieťa pomocou operácie sčítania (a rozkladu) čísel vytvára pojem súčtu a pomocou operácie odčítania pojem rozdielu (obr. 6.2). Pojmy súčtu resp. rozdielu majú vo svojom význame predstavu operácie „k číslu a pridať číslo b “, resp. „od čísla a odobrať číslo b “ a predstavu výsledku, ktorým je súčet $a + b$ resp. rozdiel $a - b$ získaný operáciou pričítania resp. odčítania. Tieto pojmy nepotrebujú pojem „=“.

Obr. 6.1 Operácia pričítania čísla 4 k číslu 2



Obr. 6.2 Pojem súčtu „dva a tri“ resp. rozdielu „sedem bez tri“ má vo význame predstavu „pridám 3 ku 2“ resp. „odoberiem 3 od 7“ ale aj predstavu výsledku, ktorým je súčet (resp. rozdiel) získaný operáciou pričítania resp. odčítania.



Ak napriek tomu používame pri zápise sčítania a odčítania symbol „=“, dieťa ho môže pochopiť len ako náhradu za slovko „je“ resp. „sú“, za ktoré vo vete vyjadrujúcej sčítanie resp. odčítanie napíše výsledok.

Preto pojem „rovná sa (=)“ musíme najprv vytvoriť. Najprv vytvoríme jeho význam a čiastočne zmysel. Potom ho začneme používať pri zápise matematických operácií a tým jeho zmysel rozšírime.

Dieťa v predškolskom veku má vytvorený len pojem „rovnaký“. Znamená to, že dve veci sa na seba veľmi podobajú – to je jeho význam pojmu „rovnaký“. Tento pojem nám príliš pri vytváraní pojmu „=“ nepomôže, pretože „veci“ na oboch stranách matematického zápisu „ $a + b = c$ “ sa vôbec na seba nepodobajú.

Postup formovania pojmu „=“

Najprv vytvoríme modely dvojice pojmov „menší“, „väčší“ resp. „menej“, „viac“. V interných modeloch týchto pojmov má dieťa predstavy väčšieho, či menšieho predmetu a nie predstavy, že väčšie číslo predstavuje viac prvkov (napr. bodiek v geometrickom zobrazení čísla) než menšie. Lahko to zistíme, keď deťom predložíme rozptýlenú množinu bodiek (musia byť dosť výrazné, aby dieťa ani jednu neprehliadlo) a kompaktnú množinu bodiek, ktorých je viac než v prvej množine. Prvá množina zaberá väčší priestor na papieri než druhá, pritom má menej prvkov. Napriek tomu deti označia prvú množinu ako väčšiu. Pojmy „menší“, „väčší“ môžeme vytvárať pomocou predstáv úsečkových čísel, t.j. bodiek usporiadaných za sebou do priamej línie, ktoré porovnáваме. Môžeme použiť aj iné spôsoby, propedeutika formovania týchto pojmov je dobre prepracovaná. Ďalej tieto pojmy prepojíme na čísla a naučíme deti porovnávať veľkosť čísel.

Zatým podobným postupom budujeme pojem „=“. Rôzne vyzerajúcim množinám s rovnakým počtom tých istých prvkov priradíme číslo vyjadrujúce počet prvkov (tieto postupy sa v prvom ročníku bežne používajú); potom však pomocou pojmu „rovnaký“, „rovnako“ zavedieme pojem „rovná sa“ napr. pomocou viet, ako je táto: „Počet jablák v modrej debničke sa rovná počtu jablák v červenej debničke.“ a pod. Môžeme si pomôcť aj úsečkovými číslami, ktoré zoradia prvky množiny tak, aby ich deti mohli ľahko porovnať. Takto vytvoríme pojem rovnosti nezávisle od toho, ako vyzerá množina prvkov, ktorej počet číslo vyjadruje. Pritom môžeme účinne využiť pojmy „väčší“, „menší“, „viac“, „menej“ – deťom môžeme ukázať (alebo aj samé na to prídu), že „=“ nie je ani „viac“ ani „menej“. Význam pojmu „=“ je potom tvorený predstavou rovnosti počtu prvkov dvoch množín nezávisle na ich tvare. V zmysle pojmu „=“ je aj väzba na „viac“ a „menej“ vyjadrená pochopením, že „rovná sa“ nie je ani „viac“ ani „menej“.

Ak dieťa má pojem „=“ už vybudovaný, môžeme vytvoriť jeho prepojenie na pojmy súčtu „ $a + b$ “ resp. rozdielu „ $a - b$ “ napr. tak, že za výrazy „ $a + b$ “ (resp. „ $a - b$ “) napíšeme znak „=“ a pýtame sa detí, aké číslo má byť na druhej strane za „=“. Tým vytvoríme kognitívnu väzbu *11 medzi pojmom „=“ a pojmami „ $a + b$ “ resp. „ $a - b$ “.

* 10 Autor nezistil túto miskoncepciu iba u žiakov základnej školy (Tarábek, 2007, Inovácie). Je to neuveriteľné, ale ani niektorí študenti fyziky v prvom ročníku vysokej školy nemali dostatočne vytvorený význam pojmu „=“; mnohí z nich si totiž nevedomovali, že ak má fyzikálny výraz na jednej strane rovnice iný tvar než výraz na druhej strane, ich číselné hodnoty aj fyzikálne rozmery sa musia rovnať. Napr. pri výpočte tepla pomocou kalorimetrickej rovnice študentovi vyšiel po úprave rovnice fyzikálny rozmer odlišný od jednotky energie (jednotka tepla je rovnaká ako jednotka energie). Po upozornení na chybu sa opýtal: „A to sa má rovnať?“

* 11 Termín „kognitívna väzba“ vyjadruje fakt, že táto väzba medzi dvomi pojmami znamená poznatok. Anička si napr. uvedomí, že „=“ nie je len znamienko, za ktoré píšeme výsledok, ale znamená aj toto: „Ak som dostala dva bonbóny od tety a potom tri bonbóny od sestry, mám toľko bonbónov ako Janko, ktorý dostal naraz päť bonbónov od otecka. A môžem to napísať ako $2 + 3 = 5$.“ Anička má nielen správny význam pojmu „=“ ale aj pochopila, že znakom „=“ môže vyjadrovať rovnosť počtu prvkov dvoch rôznych množín; je to pre ňu poznatok a súčasne má v zmysle pojmov „súčet“ a „číslo“ kognitívnu väzbu na „=“.

6. Záver

Práca predkladá teoreticky spracovaný kognitívny konštrukt – trojuholníkový model pojmovej štruktúry a vývojových úrovní pojmov v externých pojmo-poznatkových systémoch vychádzajúc z histórie fyziky a prvých vývojových etáp histórie matematiky. Oproti predchádzajúcim prácam autora boli doriešené niektoré terminologické problémy predovšetkým z hľadiska zosúladenia terminológie s úrovňami vývoja pojmo-poznatkových systémov a termínmi používanými v kognitívnych vedách.

Trojuholníkový model pojmu je aplikovateľný aj na interné pojmy. Popisuje Vygotského štádiá formovania pojmov počínajú komplexom, pričom bolo rozlíšené štádium nižšieho a vyššieho komplexu ako aj pseudopojmu. Štádiá komplexu a pseudopojmu boli testovaním zisťované na interných pojmoch „vodič elektrického prúdu“, „elektrický prúd“ a „sila“ u žiakov druhého stupňa základných škôl a študentov štvorročných gymnázií. Autor je toho názoru, že štádiá komplexu a pseudopojmu sú nutnými vývojovými štádiami vo formovaní pojmov. Úlohou školského vyučovania by však malo byť – aspoň u kľúčových pojmov, ktoré si študent má osvojiť, dosiahnutie štádia plne sformovaného pojmu, a to najneskoršie na konci všobecného vzdelávania. Ukázalo sa však, že väčšina absolventov gymnázia končí strednú školu s fyzikálnymi pojmami, ktoré sú na úrovni komplexu až pseudopojmu, teda neúplného štádia pojmu.

Trojuholníkový model pojmu a koncepcia vývoja externých pojmo-poznatkových systémov sa použili na analýzu vývoja pojmu „sila“ a poznatkov s ním spojených od staroveku až do obdobia modernej fyziky. Okrem prvej primitívnej úrovne a poslednej – formálnej úrovne zodpovedajúcej teoretickej mechanike boli rozlíšené dve kvalitatívne odlišné úrovne pojmu „sila“: aristotelovská (empirická) zodpovedajúca koncepcii sily v staroveku (predovšetkým u Aristotela) a newtonovská (symbolická) zodpovedajúca koncepcii sily u Newtona. Testy realizované na zisťovanie štruktúry pojmu „sila“ u žiakov druhého stupňa základných škôl a študentov štvorročných gymnázií ukázali, že myslenie väčšiny absolventov gymnázia zostáva na starovekej – aristotelovskej úrovni, aspoň čo sa týka koncepcie pojmu „sila“ a poznatkov s ním spojených. Táto miskoncepcia bola zistená temer pre tridsiatimi rokmi a ju potvrdzujú aj neskoršie a súčasné výskumy. Autor predkladá na základe pojmovej a poznatkovej analýzy vyučovací postup, ktorý miskoncepciu starovekej koncepcie sily pomôže prekonať.

Trojuholníkový model pojmu sa použil aj na modelovanie pojmu čísla na rôznych úrovniach jeho vývoja vzhľadom na aplikáciu v kurikulárnom procese. Okrem rozlíšenia kardinálnej a ordinálnej dimenzie pojmu čísla sa ukázalo, že existujúca koncepcia osnov v prvom ročníku základnej školy má jeden vážny nedostatok, ktorý vedie

na vytváranie miskoncepce týkajúcej sa pojmu „rovná sa“ resp. „=“. Pre deti je tento pojem značkou =, ktorá sa dáva za zápis matematickej operácie a za ňu sa píše výsledok. Stotožňujú si ju s pojmom „je“ teda s prísudkom vo vete „ $a + b = c$ “, teda (vyjadrené príkladom) „ $3 + 4$ je 7 “. Táto miskoncepčia pretrváva u mnohých žiakov a študentov veľmi dlho a autor ju zistil nielen u žiakov druhého stupňa základnej školy ale aj u študentov vysokej školy.

Teoretická koncepcia trojuholníkového modelu pojmu, Vygotského štádií formovania pojmu a vývojových úrovní pojmov-pozičkových systémov sa ukázala ako účinný nástroj pri kognitívnom modelovaní pojmov a poznačkov v rámci prvých etáp kurikulárneho procesu. Okrem toho sa dá využiť v rámci vyučovacieho procesu pri tvorbe testov vstupných i výstupných znalostí týkajúcich sa kvality osvojených pojmov.

Podnety na zamyslenie

Autor sa stretol pri svojej práci so žiakmi a študentami, či už pri vyučovaní alebo v rámci testovania vedomostí, s rôznymi naučenými nezmyslami a s formálnymi vedomosťami, ktoré sa rýchlo zabúdajú. Odborná literatúra uvádza pod názvami prekoncepce, naive beliefs, miskoncepce, alternative/student frames, pre-scientific conceptions, žákovo pojetí učiva a pod. množstvo nezmyslov a formálnych vedomostí týkajúcich sa temer všetkých predmetov. Odpovede, prečo tomu tak je, sú rôzne a týkajú sa viac metodiky vyučovania. Len málo prác sa venuje tomu, ako skutočne vyzerajú pojmy a poznačky žiaka a študenta – mentálne reprezentácie pojmov a poznačkov, ktoré sú mu predkladané v škole.

Štruktúrou mentálnych reprezentácií pojmov a poznačkov sa v kognitívnej psychológii zaoberali mnohí autori a viedlo to na modelovanie štruktúry pojmov-pozičkových systémov, na tvorbu sémantických sietí, pojmových máp a pod. Vnútorňa štruktúra pojmu či poznačky je zatiaľ preskúmaná len málo.

Kognitívna analýza a trojuholníkové modelovanie pojmov ukazuje, ako asi vyzerajú pojmy a poznačky, ktoré má dieťa, žiak, študent v hlave. Je to však zložitý postup – nie je ľahké rozlíšiť všetky zložky pojmu, väzby na iné pojmy a správne ich zaradiť. Je to zatiaľ málo používaný postup a nie príliš vyskúšaný. Často sa môžeme myliť a musíme si svoje závery overovať experimentálne. Ak to však funguje, výsledok je úžasný. „Vidíme“ do mysle žiaka a študenta, vidíme, že to, čo do nej vkladáme a čo v nej zostane, nie je to, čo by sme tam chceli mať. Je to veľmi dôležité nielen pri vyučovaní ale aj pri vytváraní obsahu výučby. Žiaľ nerobí sa to, pretože na to vraj nie je čas. Ale dieťa má veľa času a poväčšinou ho „využije“ tým, že doň vkladáme vedomosti, z ktorých mu väčšina z hlavy opäť „vytečie“ a mnoho z toho, čo mu zostane, je chybné. Takže sa treba nad tým zamyslieť!

Dodatok 1: Vygotského štádiá formovania pojmov v testoch

V prácach Mlčuchová 1988, Butková 1988 boli realizované testy, ktoré okrem iného zisťovali aj Vygotského štádiá formovania pojmov. Pretože neboli ešte definované štádiá vyššieho a nižšieho komplexu či pseudopojmu, v tabuľkách sú rozlišované len štádiá komplexu, pseudopojmu a pojmu. V jednotlivých úlohách boli testované iba niektoré prvky pojmovej štruktúry: napr. význam (tabuľka 1 v kapitole 3), atribúty a väzba na nadradený pojem (tabuľka 4, 6, 7), imaginačný reprezentant (tabuľka 5).

Otázkou „Čo je elektrický prúd?“ boli sledované atributívne väzby a väzba na nadradený pojem. U pojmu „elektrický prúd“ je nadradeným pojmom „pohyb“ a atribútmi sú dve vlastnosti:

1. musí to byť pohyb voľných elektricky nabitých častíc (je to zakódované v slove „elektrický“).
2. musí to byť usmernený pohyb (je to vyjadrené slovom „prúd“).

Správna definícia by mala znieť: „Elektrický prúd je usmernený pohyb voľných elektricky nabitých častíc.“ Táto odpoveď alebo jej varianty vyjadrené konkrétnejšou formou sú v poslednom stĺpci 5 tabuľky 4.

Odpovede na úrovni pseudopojmu (stĺpec 4) sa vyznačovali väzbou na nadradený pojem, avšak niektoré s atribútom chýbali. Napr. „Elektrický prúd je pohyb voľných elektrónov alebo iónov.“ – táto odpoveď ukazuje aj znalosť dvoch referentov: prúdu tvoreného elektrónmi aj prúdu tvoreného iónmi. Iné odpovede: „Elektrický prúd je usmernený pohyb voľných častíc.“, „Elektrický prúd je pohyb voľných elektrónov.“, „Elektrický prúd je usmernený pohyb elektrónov.“

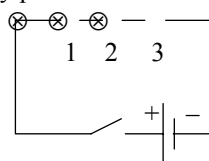
Odpoveďami na úrovni komplexu (stĺpec 3) chýbala väzba na nadradený pojem a zrejma bola absencia atribútov. Typické odpovede: „Elektrický prúd sa používa na pohon motorov, lodí atď.“, „Elektrický prúd prechádza vodičom medzi pólmi zdroja.“, „Elektrický prúd rozsvieti žiarovku, dáva do pohybu stroj...“, „Elektrický prúd je fyzikálna veličina“, „ $I = U/R$ “, „ $I = Q/t$ “. Posledné dva typy odpovedí boli ojedinelé, boli však zaradené medzi komplexy (hoci vzorce sú správne), pretože v nich nebola zrejma väzba na nadradený pojem a atribúty.

Číselné údaje vo všetkých stĺpcoch udávajú percentuálny podiel odpovedí (z daného počtu respondentov uvedeného v stĺpci 1) zaradených do príslušnej kategórie a vekovej skupiny. Stĺpec 1 udáva počet respondentov v konkrétnej vekovej skupine. Stĺpec 2 udáva percentuálny podiel nulových odpovedí (žiaci neodpovedali)

a odpovedí nesprávnych alebo nezrozumiteľných, ktoré sa nedali z hľadiska zaradenie do stĺpcov 3, 4 a 5 vyhodnotiť.

stĺpec	1	2	3	4	5
vek respondentov	počet resp.	nulová/nesprávna odpoveď	odpoveď na úrovni komplexu	odpoveď na úrovni pseudopojmu	odpoveď na úrovni pojmu
žiaci 8. ročníka ZŠ	315	47,3 %	16,9 %	27,9 %	7,9 %
študenti 1. ročníka gymnázia	200	38,5 %	9,0 %	50,5 %	2,0 %
študenti 3. ročníka gymnázia	218	5,5 %	9,3 %	73,9 %	11,3 %
študenti 4. ročníka gymnázia	200	7,5 %	4,5 %	80,0 %	8,0 %

Úlohou „Ktorá žiarovka sa rozsvieti pri zapnutí vypínača ako prvá? Svoju odpoveď zdôvodni!“ sa testoval imaginačný reprezentant pojmu „elektrický prúd“. Tri očíslované žiarovky boli zapojené v sérii v uzavretom obvode s jednosmerným zdrojom.



Úplný imaginačný reprezentant by mal byť tvorený správnou predstavou pohybu elektricky nabitých častíc vodiča, ktoré sa pod vplyvom elektrického poľa (šíriaceho sa vodičom rýchlosťou svetla) začnú pohybovať naraz (aspoň v bežných elektrických obvodoch, kde je oneskorenie úplne zanedbateľné, pretože študenti sa to takto učili).

Odpovede na úrovni pojmu (stĺpec 5) vyjadrovali predstavu správneho imaginačného reprezentanta aj so správnym vysvetlením.

Odpovede na úrovni pseudopojmu (stĺpec 4) vyjadrovali správny imaginačný reprezentant, avšak vysvetlenie bolo nedostatočné, chybné alebo sa odvolávalo na konkrétnu skúsenosť. Napr. „Žiarovky sa rozsvetia naraz, lebo prúd v obvode je konštantný – keď zapnem luster s viacerými žiarovkami, tiež sa rozsvetia naraz – naraz, lebo prúd v obvode naraz vzniká a naraz zaniká – lebo prúd sa šíri rýchlosťou svetla a nepostrehli by sme ten rozdiel v zasvetení (nie prúd ale elektrické pole sa šíri rýchlosťou svetla).“

Odpovede na úrovni komplexu (stĺpec 3) boli chybné, pretože vyjadrovali predstavu pomalého pohybu elektrického prúdu (čo je síce správne), ale nevzali v úvahu rýchlosť svetla, ktorou sa šíri elektrické pole vo vodiči. Príklady odpovedí: „Žiarovka č. 1 sa rozsvieti ako prvá, lebo ňou bude prechádzať elektrický prúd ako prvou.“, „Žiarovka č. 1 sa rozsvieti ako prvá, lebo prúd ide od + k –.“, „Žiarovka č. 3 sa rozsvieti ako prvá, lebo prúd ňou bude skôr pretekať.“, „Žiarovka č. 3 sa rozsvieti ako prvá, lebo prúd je pohyb záporných častí a tie idú od + k –.“

Číselné údaje vo všetkých stĺpcoch udávajú percentuálny podiel odpovedí (z daného počtu respondentov uvedeného v stĺpci 1) zaradených do príslušnej kategórie a vekovej skupiny. Stĺpec 1 udáva počet respondentov v konkrétnej vekovej skupine. Stĺpec 2 udáva percentuálny podiel nulových odpovedí (žiaci neodpovedali) a odpovedí nesprávnych alebo nezrozumiteľných, ktoré sa nedali z hľadiska zaradenie do stĺpcov 3, 4 a 5 vyhodnotiť.

stĺpec	1	2	3	4	5
vek respondentov	počet resp.	nulová/nesprávna odpoveď	odpoveď na úrovni komplexu	odpoveď na úrovni pseudopojmu	odpoveď na úrovni pojmu
žiaci 8. ročníka ZŠ	315	3,2 %	45,7 %	45,1 %	6,0 %
študenti 1. ročníka gymnázia	200	5,5 %	60,5 %	27,0 %	7,0 %
študenti 3. ročníka gymnázia	218	4,1 %	58,7 %	25,7 %	11,5 %
študenti 4. ročníka gymnázia	200	2,0 %	63,0 %	29,5 %	5,5 %

Úlohou „Vysvetli z fyzikálneho hľadiska, prečo je bezpečnejšie skákať z veľkej výšky do vody než na betónovú podlahu.“ sa testoval atribút sily, ktorým je skutočnosť, že vyjadruje pôsobenie medzi fyzikálnymi objektmi.

Správne odpovede na úrovni pojmu (stĺpec 5) vysvetľovali situáciu pomocou brzdných síl vznikajúcich pri dopade do vody (sú menšie) a na betón (brzdné sily sú väčšie).

Odpovede na úrovni pseudopojmu (stĺpec 4) vysvetľovali situáciu rozličnou veľkosťou spomalenia vo vode a na betóne, čo v predstavách študentov implikovalo rozlične veľké sily. Atribút bol preukázaný nepriamo – teda jeho väzba na jadro pojmu „sila“ nie je ešte dostatočná.

Odpovede na úrovni komplexu (stĺpec 3) vysvetľovali situáciu menším odporom vody, tvrdosťou betónu, väčším odporom vody v porovnaní so vzduchom, teda bez akejkoľvek väzby na atribút sily. Z toho možno usudzovať, že atribút sily ešte žiaci v štruktúre pojmu vybudovaný nemajú.

Číselné údaje vo všetkých stĺpcoch udávajú percentuálny podiel odpovedí (z daného počtu respondentov uvedeného v stĺpci 1) zaradených do príslušnej kategórie a vekovej skupiny. Stĺpec 1 udáva počet respondentov v konkrétnej vekovej skupine. Stĺpec 2 udáva percentuálny podiel nulových odpovedí (žiaci neodpovedali) a odpovedí nesprávnych alebo nezrozumiteľných, ktoré sa nedali z hľadiska zaradiť do stĺpcov 3, 4 a 5 vyhodnotiť.

Tabuľka 6: Riešenie úlohy „Vysvetli z fyzikálneho hľadiska, prečo je bezpečnejšie skákať z veľkej výšky do vody než na betónovú podlahu.“ (Butková 1988)					
stĺpec	1	2	3	4	5
vek respondentov	počet resp.	nulová/nesprávna odpoveď	odpoveď na úrovni komplexu	odpoveď na úrovni pseudopojmu	odpoveď na úrovni pojmu
žiaci 8. ročníka ZŠ	315	43,2 %	44,9 %	11,8 %	0,5 %
študenti 1. ročníka gymnázia	209	41,5 %	44,8 %	8,2 %	0,5 %
študenti 3. ročníka gymnázia	115	49,3 %	33,9 %	11,3 %	1,0 %
študenti 4. ročníka gymnázia	187	48,2 %	37,9 %	11,8 %	2,1 %

Otázkou „Čo je to sila?“ sa testoval atribút sily – pôsobenie medzi fyzikálnymi objektmi a väzba na nadradený pojem. Študenti sa neučia vysvetľovať silu ako príčinu zmenu pohybového stavu, teda nemôže v definícii nadradený pojem „príčina“ používať. Je to v súlade s koncepciou modernej fyziky, kde je sila primárnym pojmom, t.j. nemá nadradený pojem a definovaný iba vzorcom (pozri 4. Formálna úroveň pojmu „sila“ na str. 131) alebo pojmom podradeným pojmu interakcia, čo sa v dobe testovania študenti ešte neučili. Študenti však väzbu sily na pojem „príčina zmeny v pohybe telies alebo príčina deformácie“ pri plne vybudovanom pojme cítia a opisujú to konkrétnymi vyjadreniami, napr.: „Sila je niečo, čo pôsobí na teleso a môže meniť jeho pohybový stav alebo môže mať deformačné účinky.“, „Je to fyzikálna veličina. Ak na teleso pôsobíme silou, tak sa to prejavuje zmenou pohybového stavu alebo deformáciou.“. Takéto odpovede boli zaradené do posledného stĺpca 5.

Odpovede na úrovni pseudopojmu (stĺpec 4) sa vyznačovali znalosťou atribútu „pôsobenie“, chýbala však informácia o väzbe na nadradený pojem chápaný ako príčina zmeny pohybu. Boli to napr. odpovede: „Ak je teleso dané do pohybu s rýchlosťou v , tak naň pôsobí sila F .“, „Sila je určitý tlak na predmet, ktorý spôsobuje pohyb.“, „Sila je vektorovou fyzikálnou veličinou. Je to miera pôsobenia na teleso.“, „Sila je pôsobenie na teleso.“

Odpovediam na úrovni komplexu (stĺpec 3) chýbala akákoľvek zmienka o atribúte sily, napr.: „Sila je fyzikálna veličina určená smerom, veľkosťou a pôsobiskom.“, „Sila je daná súčinom $F = m \cdot a$.“

Číselné údaje vo všetkých stĺpcoch udávajú percentuálny podiel odpovedí (z daného počtu respondentov uvedeného v stĺpci 1) zaradených do príslušnej kategórie a vekovej skupiny. Stĺpec 1 udáva počet respondentov v konkrétnej vekovej skupine. Stĺpec 2 udáva percentuálny podiel nulových odpovedí (žiaci neodpovedali) a odpovedí nesprávnych alebo nezrozumiteľných, ktoré sa nedali z hľadiska zaradiť do stĺpcov 3, 4 a 5 vyhodnotiť.

Tabuľka 7: Odpovede na otázku „Čo je to sila?“ (Butková 1988)					
stípec	1	2	3	4	5
vek respondentov	počet resp.	nulová/nesprávna odpoveď	odpoveď na úrovni komplexu	odpoveď na úrovni pseudopojmu	odpoveď na úrovni pojmu
žiaci 8. ročníka ZŠ	315	17,8 %	45,0 %	32,9 %	4,3 %
študenti 1. ročníka gymnázia	209	28,4 %	25,7 %	44,3 %	1,6 %
študenti 3. ročníka gymnázia	115	23,5 %	18,3 %	53,9 %	4,3 %
študenti 4. ročníka gymnázia	187	21,4 %	32,6 %	43,3 %	2,7 %

Dodatok 2 - citácie

C 01: Šalát, T. a kol. (1981). Malá encyklopédia matematiky (ďalej značíme MCE).

Str. 40: teória množín nemeckého matematika E.Zermela

IX. axióma: Ku každej množine A možno priradiť vec (symbol) A (**kardinálne číslo** alebo mohutnosť množiny) tak, že rovnosť $A = B$ platí vtedy a len vtedy, keď $A \sim B$ (t. j. množina A je ekvivalentná s množinou B).

Str. 39: Uvedené definície v prípade konečných kardinálnych čísel (t. j. kardinálnych čísel konečných množín) splyvajú s poznatkami zo strednej, resp. už zo základnej školy – ďalej je to ilustrované na sčítaní a násobení.

Str. 42: Ak označíme znakom **1 kardinálne číslo** jednoprvkovej množiny a pre $n \in N$ kladieme $\nu(n) = n + 1$ (špeciálne $\nu(0) = 1$), $\nu(n)$ nazveme nasledovníkom čísla n , potom na základe našej definície množiny N možno odvodiť nasledujúce vlastnosti množiny N , ktoré spolu so základnými pojmami (termínmi) „celé nezáporné číslo“, „nula“ a „nasledovník“ tvoria základ axiomatiky celých nezáporných čísel, ktorú vybudoval taliansky matematik G. Peano. Poznámka: N je množina celých nezáporných čísel.

C02: Matuška, M., Trefný, Z. (1987). Matematika základnej školy v heslách. Bratislava: SPN

Str. 8: Čísla 1, 2, 3, 4, 5, ... sú **prirodené čísla**. Sú prostriedkom na označenie počtu osôb, predmetov apod. Každé prirodzené číslo má jediného nasledovníka a okrem čísla 1 i jediného predchodcu.

C03: Pavlič, G. (2001), Školská encyklopédia matematiky. Bratislava: Príroda

Str. 7: Prirodzené čísla „nedefinuje“ ani nevysvetľuje. Na ich vysvetlenie sú použité Peanove axiómy:

Axióma 1: Číslo 1 je prirodzené.

Axióma 2: Každé prirodzené číslo n má svojho nasledovníka, číslo $n + 1$.

Axióma 3: Číslo 1 nie je priamym nasledovníkom nijakého prirodzeného čísla.

Axióma 4: Ak je priamym nasledovníkom dvoch prirodzených čísel to isté prirodzené číslo, potom sú tieto dve čísla zhodné (vzájomne sa rovnajú).

Axióma 5 (veta o úplnej indukcii): Nech isté tvrdenie (vlastnosť) platí pre číslo 1. Ak z jeho platnosti pre číslo n vyplýva platnosť pre číslo $(n + 1)$, teda pre priameho nasledovníka čísla n , potom je toto tvrdenie platné pre všetky prirodzené čísla. T. j. ak tvrdenie platí pre číslo 1, platí aj pre číslo 2. Ak platí pre číslo 2, platí aj pre 3. Ak platí pre číslo 3, platí aj pre 4 atď.

C04: Kolbaská, J., Tarábek, J. (2000). Osvetľovník matematiky. Prirodzené a celé čísla.

Str. 5: **Prirodzené čísla** sú tie, ktoré poznáme od mala. Hovorili sme si: „Ja som jeden, s mamou sme dvaja, s ockom traja, so sestričkou štyria...“ Tento počet sme zapisovali číslami 1, 2, 3, 4,...

C05: Zmaturuj z matematiky (2005), Bratislava: Didaktis

Str. 9: **Prirodzené čísla** vyjadrujú nenulový počet prvkov. Množinu (obor) prirodzených čísel označujeme písmenom N . Množina prirodzených čísel má nekonečne veľa prvkov.

C06: Martin Šechný, M. (2002).

<http://209.85.129.104/search?q=cache:VIJdFTRo7PgJ:www.shenk.sk/temy/fm.html+%22ordin%C3%A1lne+%C4%8D%C3%ADslo%22&hl=sk&ct=clnk&cd=13>

Všetky výskumy smerujúce ku skúmaniu poradia a miery prináležia matematike. Mieru tu treba rozumieť ako veľkosť, počet, teda základnú číslovku (**kardinálne číslo**). Poradie je vyjadrené poradovou číslovkou (**ordinálne číslo**).

C07: (2007) <http://cs.wikipedia.org/wiki/%C4%8C%C3%ADslo>

Číslo je abstraktní entita užívaná pro vyjádření množství. Čísla se zapisují pomocí číslic, a to v různých číselných soustavách, a pomocných znaků, zejména desetinné čárky a znamének plus a minus. Čísllice rozdělujeme podle znázornění na arabské číslice, které se dnes nejčastěji používají a na římské číslice.

Literatúra

- Adamčíková, V., Tarábek, P. (2000) Concept charts. Vancouver: WEM – World Education Market.
- Adamčíková, V. Tarábek, P. (2007) Didaktická komunikácia v predmetových didaktikách. *Inovácie v škole 2007* Podbanské, Bratislava: Združenie Orava pre demokraciu vo vzdelávaní.
- Anderson, M., T., Spector, M., J. (2000). *Integrated and Holistic Perspectives on Learning, Instruction and Technology*. Springer, ISBN 0792367057
- Antológia z diel filozofov. (1972) Od Aristotela po Plotína. Bratislava: Pravda
- Bartolo, A., Daumüller, M., Della Sala, S., Goldenberg, G., (2007) Relationship between object-related gestures and the fractionated object knowledge system. *Behavioural Neurology*, Volume 18, Number 3, p. 143 - 147
- Bergeron Corrie. (2007) Instructional design 101. <http://rocky.utasca.net/~corrie/ID101B.pdf>
- Brockmeyer, J., Tarábek, P. (2007). Theoretical Conception of Physics Education (Teoretická koncepcie didaktiky fyziky). *Educational & Didactic Communication 2007*. Bratislava: Educational Publisher Didaktis
- Concept analysis (2007) <http://www.cwu.edu/~streetl/CONCEPTS.html>
- Čáp, J., Mareš, J. (2001). *Psychologie pro učitele*. Praha: Portál s. r. o.
- Damasio, H., Grabowski, T. J., Tranel, D., Hichwa, R. D., & Damasio, A. R. (1996). A neural basis for lexical retrieval. *Nature*, 380, 499-505.
- Driscoll, M. P. Tessmer, M. (1985). Applications of the concept tree and rational set generator for coordinate concept learning. American Educational Research Association, Chicago.
- Driscoll, M.P. (1989, February). Concept trees and RSGs: New and easy ways to teach and learn concepts. Congreso Internacional De Ciencias De La Educacion, University of Monterrey, Monterrey, Mexico.
- Fenclová, J. (1980) Fyzikální vědomosti našich studentů (Physical knowledge of students). Praha: Academia
- Frege, G. (1892) Über Sinn und Bedeutung, see http://en.wikipedia.org/wiki/On_Sense_and_Reference
- Gregušová, M. (1986). Electricity knowledge of students in high schools. Bratislava: Komenský University
- Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw Hill.; Guilford, J. P. (1988). Some dangers in the structure-of-intellect model. *Educational & Psychological Measurement*, 48, 1–4
- Hejnová, D. (1984). Student's Frameworks of Motion. Prague: Charles University
- Hestenes, D., Wells, M., Swackhammer, G. (1992) Force Concept Inventory. *Physics Teacher* 30, 141
- Kimáková, K. (2008). Úvod do štúdia didaktiky biológie. – kap. 8.3. Pojmové mapy. Košice: Prírodovedecká fakulta, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika.
- Kopásková, J. (2006) Vyučovanie sčítania a odčítania do 10. Interná štúdia, Bratislava: Didaktis
- Linhart, J. (1976). Činnost a poznávání. Praha: Československá akademie věd.
- Mann, G. (1995) Beeline - A Situated, Bounded Conceptual Knowledge System. *Journal of Systems Research and Information Science*, 1995, 7, pp 37-53,
- Mlčúchová, L. (1988). Electricity knowledge of students in secondary and high schools. Bratislava: Komenský University
- Nachtigall, D. (1981). The pre-Newtonian Concept of Motion in the Minds of Students. *Proceedings of Conference Methods of Teaching Physics*. Thailand: Khon Kaen University
- Nakonečný, M (1997) Encyklopedie obecné psychologie. Praha: Academia.
- Půlpán, Z. (1981) Vytváření struktur ve středoškolské fyzice. Hradec Králové: Pedagogická fakulta
- Půlpán, Z. (1988) K problematice sémantizace některých přírodovědných poznatků. Hradec Králové: Pedagogická fakulta.
- Průcha, J. (2002) Moderní pedagogika. Praha: Portál s. r. o.
- Renström, L., Anderson, B., Marton, F. (1990) Students Conception of Matter. *Journal of Educational Psychology*, 82, C.3, p. 555 – 569
- Rieber, R. W., Robinson, D. K. (2004) The Essential Vygotsky. *Child Psychology: Vygotsky's Conception of Psychological Development*. p. 441. Springer
- Sedláková, M. (2004) Vybrané kapitoly z kognitivní psychologie. Mentální reprezentace a mentální modely. Praha: Grada.
- Sharma, S.V., Sharma, K.C. (2007) Concepts of force and frictional force: the influence of preconceptions on learning across different levels. *Physics Education* Vol. 42. Number 5
- Sternberg, R.J. (2002) Kognitivní psychologie. Praha: Portál s. r. o.

- Svoboda, K. (1962) Zlomky predsokratovských mysliteľů. Praha: ČSAV
- Tarábek, P. (1985) Formálnosť pochopenia fyzikálnych pojmov u študentov (Formal understanding of student's physical concept). *Proceedings of conference DIFYZ 85*. Račkova dolina, Nitra: Association of Slovak Physicians.
- Tarábek, P. (1985) The Structure of empirical physics knowledge and the teaching physics. *Zborník 8. konferencie československých fyzikov*. Bratislava
- Tarábek, P. (1988) Model poznávacieho procesu fyziky a štruktúra fyzikálnych pojmov. V zborníku Analýza poznávacieho procesu v odborových didaktikách prírodných vied a matematiky zo seminára pracovnej skupiny pre obecné otázky odborových didaktík matematiky a prírodovedných predmetov v rámci DÚ ŠPZV IX-10-2/2. Bratislava: ÚÚVU.
- Tarábek, P. (1989) Developmental levels of the natural science knowledge, *Miscellanies of the European Regional Workshop*, Praha: UNESCO.
- Tarábek, P. (2002) Levels of internal concept knowledge system, *Analytical-Synthetic Modelling of Cognitive Structures (volume 2: Didactic communication and educational sciences)*, New York, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2003) Developmental levels of the natural science knowledge. *Formation and Design of Textbook (volume 1)*. London, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2003) External and internal concept knowledge system. *Formation and Design of Textbook (volume 2)*. London, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2004) Concept structure. *Modern Science and Textbook Creation (Vol. 1)*. Frankfurt, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2004) Štruktúry pojmov a poznatkov - aplikácie vo vyučovaní. *Inovácie v škole 2004*. Podbanské, Bratislava: Združenie Orava pre demokraciu vo vzdelávaní.
- Tarábek, P. (2004). Odmaturuj z fyziky. Physics Guide. Brno: Didaktis
- Tarábek, P., Kopečková, S. (2005) Matematika 1 pro 1. ročník ZŠ. Brno: Didaktis
- Tarábek, P. (2005a) Concept networking based on the triangular model of concept's structure. *Modern Science and Textbook Creation (Vol. 2)*. Frankfurt, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2005b) Zmysel školského vzdelávania v spoločnosti so znalostnou ekonomikou - Modelovanie štruktúry pojmov a poznatkov. *Inovácie v škole 2005*. Podbanské, Bratislava: Združenie Orava pre demokraciu vo vzdelávaní.
- Tarábek, P. (2006) Concept levels imagined by triangular model of concept's structure. *Educational and Didactic Communication*. Frankfurt, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2006) Vývojové úrovne pojmov pri ich formovaní. *Inovácie v škole 2006*. Podbanské, Bratislava: Združenie Orava pre demokraciu vo vzdelávaní.
- Tarábek, P., Záškodný, P. (2006) Didaktická komunikace fyziky a její aplikace. Matematika, fyzika, informatika 16, 3 - 4. Praha: Prometheus.
- Tarábek, P. (2006) Zmaturuj z fyziky. Physics Guide. Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2007a) Vývojové úrovne matematických pojmov pri ich formovaní. *Inovácia v matematickej príprave žiakov, zborník z vedeckej konferencie*. Trnava: Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity.
- Tarábek, P. (2007b). Kognitívne termíny v teórii didaktickej komunikácie prírodných vied. *Educational & Didactic Communication 2007*. Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2007c). Didaktická komunikace fyziky a její struktura. *Educational & Didactic Communication 2007*. Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2007d). Štruktúra pojmov u detí predškolského veku. Interná štúdia. Bratislava: Didaktis.
- Tarábková, M. (2007) Nemecká gramatika. German Grammar. Bratislava: Educational Publisher Didaktis
- Tarábková, M. (1986) Štúdium pochopenia pojmu „sila“ u žiakov 6. – 8. ročníka základnej školy. Bratislava: Gym.J.Hronca.
- Tessmer, M., Wilson, B., Driscoll, M. (1990). A new model of concept teaching and learning. *Educational technology, research and development*, 38 (1), 45-53.
- The MacTutor History of Mathematics Archive (2007) University of St. Andrews, Scotland, <http://www-history.mcs.ac.uk/>
- Tuomi Ilkka. (1998). Vygotsky in a Team Room: An exploratory study on collective concept formation in electronic environments. Nokia Research Center. P. O. Box 407, FIN-00045 Nokia Group, Finland. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=798712>
- Voight, V. (1981) Úvod do semiotiky. Bratislava: Tatran
- Vygotskij, L.S.: Myšlení a řeč. Moskva: Akademia pedagogičeskich nauk, 1956; Praha: SPN, 1970; Praha: Portál, 2004.

- Yih, J.M., Lin, Y.H., Hung, W.L. (2007). Fuzzy Approach Method for Concept Structure Analysis based on FLMP and ISM with Application in Cognition Diagnosis of Linear Algebra. Proceedings of the 12th International Conference on Fuzzy Theory & Technology. <http://www.cs.nhcue.edu.tw/wlhung/publications.htm>
- Záškodný, P. (2004) Theory of educational communication and cognitive structure of physics. *Modern Science and Textbook Creation (Vol. 1)*. Frankfurt, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Záškodný, P. (2005) Modeling of physics structure. *Modern Science and Textbook Creation (Vol.2.)*. Frankfurt, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Záškodný, P. (2006) Model of structure of non-statistical physics. *Educational and Didactic Communication*. Frankfurt, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Záškodný, P. (2006) *Survey of principles of theoretical physics*. Ostrava: Algoritmus.
- Záškodný, P. (2007). Metody strukturace variantních forem kurikula. *Educational & Didactic Communication 2007*. Bratislava: Educational Publisher Didaktis.

Cognitive Analysis and Triangular Modeling of Concepts in Curricular Process

Pavol Tarábek

Didaktis, E-mail: didaktis@t-zones.sk

Key words: conceptual knowledge system, mental conceptual knowledge system, cognitive analysis of concept structure, triangle model of concept structure, triangle modeling of concept structure, Vygotian phases of concept formation – complex, pseudoconcept, developmental levels of mathematical and physical concepts – primitive level, imaginative level, empirical level, icon level, symbolical level, formal level, developmental levels of conceptual knowledge systems – primitive empirical, empirical, parametrical, structural, formal level

Abstract: The paper shows a triangular model of concept structure and its developmental levels. The basic components of the model are: core C (word, representative semantic image, and a symbol), meaning M, meaning layers M1, M2, M3, sense S and their relationships. The model distinguishes the concept's meaning and sense like two disjunctive sets. Based on this model, a specific method of cognitive analysis of concepts has started to develop. This method enables cognitive modelling – the construction of cognitive models of single external concepts and their mental representations named as triangle modeling of concept structure. Secondly the paper describes the developmental levels of concept formation in the historical development and during the education process. Thirdly the paper presents several triangular models of Vygotian phases of concept formation on concrete physical concepts and triangle models of developmental levels of concepts “force” and “number”. The usage of triangular modeling in learning process and curricular process of curriculum creation is showed.

Content

1. Introduction	108
Conceptual Knowledge Systems	108
2. Triangular model of concept structure	109
Core of concept.....	109
Meaning of concept.....	110
Sense of concept.....	111
Figure 1: Triangular model of concept structure	113
3. Vygotian phases of concept formation.....	114
Description of the Vygotian phases of concept formation by the triangular model.....	114
Vygotian phases of the formation of the concept “conductor of the electric current”.....	116
4. Developmental levels of mathematical and physical concepts	122
Primitive level of concept.....	122
Empirical/imaginative level of concept	123
Symbolical level of concept	124
Formal level of the concept	125
WISF-developmental levels of scientific concepts.....	126
WISF-developmental level of the concept “force”.....	127
Primitive level of the concept “force”	127
Imaginative/empirical level of the concept “force”	128
Symbolical level of the concept “force” at the parametric level of CKS.....	129
Symbolical level of the concept “force” at the structural level of CKS.....	131
Formal level of the concept “force”	131
5. Cognitive analysis and triangular modeling of concept structure in curricular process – developmental misconceptions	132
Cognitive analysis and the modeling of the concept “force”.....	132
Development of the concept “force” – transition from the imaginative-empirical (Aristotelian) level to the symbolical (Newtonian) level.....	134
Developmental misconceptions	135
Development of the physical concepts according to the Vygotian phases	135
Vygotian misconceptions	135
Cognitive analysis and triangular modeling of concept “number” (It does not translated yet.).....	
6. Conclusions.....	140
References	140

1. Introduction – method of cognitive analysis and synthesis of concepts based on triangular model of concept structure

Many studies were conducted to explore the misconceptions *1 of pupils and students over the last two and a half decades (Hestenes et al 1992, 1995, Nachtigall 1981, Hejnová 1984, Renström et al 1990, Sharma 2007, Tarábek 1985, 1988, 1989, 2002, reviewed in Adamčíková 2007). The various causes of the formation of these misconceptions were analysed. It was found out that the formation of misconceptions could be attributed to textbooks, incorrect and incomplete formation of concepts, formal education with an accent on formal knowledge, etc (Fenclová 1980, Tarábek, 1985, 2005, Sharma 2007, Brockmeyer, Tarábek 2007, Adamčíková, 2007). The author's studies of misconceptions have resulted in the creation of a model of concept structure (Tarábek, 1988) that has proven to be an efficient tool for the analysis of learners' concepts and knowledge. The model, called the **triangular model of concept structure** (Tarábek, 2005), is built upon Vygotsky's concept theory (Vygotsky, 1986) and besides the description of spontaneous concepts development, it distinguishes several stages in the development of scientific concepts during physics and math concept learning. This model also distinguishes the concept's meaning and sense like two disjunctive sets following Frege's idea of meaning/reference – Bedeutung and sense – Sinn (Frege, 1892). Thirdly, the model is based on the idea of a semantic/semiotic triangle. The current model is used for cognitive analysis of concepts in curriculum formation.

The method of the **cognitive analysis and synthesis** of external scientific concepts and their mental representations is based on the **triangular model of concept structure** and its developmental levels. This method enables to construct and design models of the structure of external and internal concepts as elements of external and internal conceptual knowledge systems *2. The method is named as a **triangular modeling** of concepts.

The triangular modeling may be used as one of the methods of the **cognitive analysis** and **synthesis**, particularly in connection with the didactic transformation DT2 in the course of the didactic communication related to the creation of the didactic system. Didactic transformation DT2 corresponds to the curriculum transformation CT2 = conceptual curriculum → intended curriculum in the course of the curricular process (Tarábek, Záškodný, 2007). The triangular modeling may be used for **the cognitive analysis** and **synthesis** of the external concepts to adapt them on the cognitive level of the learners.

The triangular modeling may be used for **the cognitive analysis** and **synthesis** of the internal concepts of the learners during the transformation T4 in the course of the instruction, and for finding out the quality of the outputs of the educational process – the implemented curriculum, particularly for:

1. Finding out the structure and level of the input concepts and preconceptions of the learners,
2. Finding out the structure and level of the output concepts of the learners after finishing the given stage of the instruction process. The model is very efficient for detecting the causes of formation of misconceptions, i.e. erroneously formed concepts and knowledge in the course of the school instruction (Adamčíková, Tarábek 2007).

*1. It was established that pupils and students enter their physics lessons and courses with some preconceptions (preconceived notions and beliefs). Then they learn in the school not only formal knowledge, but construct their own incorrect views, knowledge, incomplete concepts also referred to as misconceptions, alternative/student frames, pre-scientific conceptions, etc.

*2 Conceptual knowledge systems

Scientific concepts, knowledge, rules, laws and principles comprise a system with a structure (Sternberk 1999). Therefore in the cognitive science the following terms are used: system of concepts, system of knowledge, mental knowledge system, concept knowledge system, conceptual framework, conceptual knowledge system, etc. According to Guilford's structure of intellect theory and supporting papers (Anderson, Bartolo, Damasio, Mann, 1996; Tarábek, 2007) we use the term **conceptual knowledge system** and distinguish the following two systems:

- External conceptual knowledge system – ECKS
- Internal (mental) conceptual knowledge system – ICKS.

Internal conceptual knowledge system (ICKS) or **mental conceptual knowledge system** is a result of the individual cognitive process of a human. It is a system of concepts and knowledge that the cognitive agent forms or acquires through the processes of education, observation, empirical experience, as well as in the process of scientific cognition through goal-oriented experimentation and with own thinking. This knowledge involves declarative and procedural knowledge. The concepts have their own structure involving subordinate concepts and images as components of their meaning (Tarábek, 2004, 2005, 2006, 2007).

External conceptual knowledge system (ECKS) is the result of social cognitive process, i.e. cognitive processes of human society as a system of cognitive agents, while it is necessary to distinguish what system is being discussed.

Scientific external conceptual knowledge system is the result of the cognitive process of a scientific community in a given science. It consists of two systems: the system of scientific concepts, facts, laws, principles, theories, and their applications and interpretations and the system of procedural knowledge – cognitive, modeling, application and interpretation methods and procedures that the given science make use of. The scientific external conceptual knowledge system also includes the scientific representation of reality (from the point of view of the given science) – the system of general images of the reality consistently connected with the scientific knowledge and formulated usually in the natural language with scientific terms. Scientific ECKS also involves concepts of the natural language that scientists/experts use when they present scientific results to people who are not experts in the given science.

Philosophical conceptual knowledge system is the result of the cognitive process of a given philosophical school of philosophers.

Technical external conceptual knowledge system is the result of cognition and the work of experts and scientists in a given technical field.

Social external knowledge systems are formed by the general experience and thinking of humans in the process of cognition of reality, and they are transmitted to subsequent generations by diverse means of social communication.

Scientific, philosophical, technical and social external knowledge systems have always been transmitted to subsequent generations by means of education. Only the few most educated individuals acquire the complete knowledge system in the given science or technical field as a whole, so that their internal knowledge systems are, in effect, identical with the corresponding external knowledge system.

Analysis of the historical development of external knowledge systems led to distinguishing of several **levels of external conceptual knowledge systems** in physics and **developmental levels of concepts** in mathematics:

- In physics there are the levels: primitive-empirical, empirical, parametric, structural and formal (Tarábek 1988, 1989, 2002, 2003, 2006);
- In mathematics there are the levels: empirical (visual), imaginative/icon, symbolical and formal (Tarábek 2006, 2007), see Fig. 2.

Internal conceptual knowledge system comprises the elements and relations between them. Basic elements of ICKS are concepts on various levels of abstraction and various levels of formation. They also involve words, mathematical, physical and other symbols, images on various levels of abstraction, as well as features of single images – perceptions stored in memory. Relations between elements of ICKS are of various types. The set of relations is much greater than the set of elements (Tarábek 1988, 2004, 2005). Relations between basic elements form elements of a higher order – various contextual relations between words of natural language, grammar, experience, empirical and theoretical laws, principles, mathematical theorems, logical relations between axioms, laws and principles of scientific theory including relations enabling the interpretation of theory into reality, functional relations between elements of cognitive models of technical systems etc.

Therefore, the **internal conceptual knowledge system** is a pair $[M, Re]$, where M is the set of all elements of ICKS and Re is the set of all binary relations on M – relations between the elements of ICKS (Tarábek 1988).

In relation to the terms “internal and external conceptual knowledge system” we also use the following terms:

- External concepts – internal concepts,
- External knowledge – internal knowledge.

If we assume that the internal conceptual knowledge system is a **static structure** in the brain of a cognitive agent (like computer software), then the **real process** of perception and thinking is a functioning of this structure using existing relations between elements. The internal conceptual knowledge system may change like any other software. Changes of ICKS are caused by learning, cognition and creativity.

2. Triangular model of concept structure

Derived from semantic modelling of concepts and semantic networking (Půlpán, 1988, Sternberk 1999, Tarábek 1985, 1988, 1989) the **triangular model of concept structure** (Tarábek, 2004, 2005, 2006, 2007) was created. Afterwards, its concept levels were specified (See Fig. 2). The basic components of the model are: **core C**, **meaning M** and **sense S**, as well as their mutual connections and **hierarchical layers M1, M2, M3** of the meaning. Based on this model the specific method of **cognitive analysis** and **synthesis** of concepts has started to develop. This method enables a construction of **cognitive models** of single external and internal concepts.

Core of concept

Core C of concept is composed of three mutually linked elements: **word W**, a **symbol**, and a **representative semantic image**. The **representative semantic image** (RSI) is the dominant image that emerges in the mind after saying a given word.

A representative semantic image may appear in the mind as a dominant image during a thought operation with the word or symbol. Thus the mental representation of the objects, phenomena, events, and entities in the core consist of three components: word, analogue component – RSI, and symbolical one – symbol.

In many cases, a visual form of the representative semantic image is formed, too. For the visual form the term **semantic icon** is usual. The icon is often formalized and used in common communication when a brief visual expression without text is needed – at airports, stations, in computer software etc. Examples of formalized icons are presented below. Icons with the ‘*’ sign are combinations of warning (yellow and red) and icon of fire or radiation respectively.



Meaning of concept

Meaning M of concept (See Fig. 1) is composed of the set of cores of all subordinate concepts and sets of images referring to the given concept core and of the set of meaning links. **Meaning links** are the links between the concept core and subordinate concepts or images. In the meaning of concept we can differentiate three hierarchical **meaning layers** M1, M2, and M3.

The meaning layer M1 is a **referential set** – set of **referentes**, e.g. subordinate referential concepts, which refer to the given concept core. The referents are coordinate concepts and divide the whole class of denotata (i.e. objects, phenomena, events, entities referred to the given concept core) into disjoint subclasses. For instance, the class of referential concepts of the concept “force” is composed of concepts: “gravitational force”, “electromagnetic force”, “nuclear force”, and “weak interaction”. However, it is necessary to emphasize that in ICKS there may exist also other classes of referential concepts dividing the class of denotata in a different way. For instance, in classical mechanics, forces are divided into real and fictitious. The real ones are gravitational, electric and magnetic forces. The fictitious ones are, for instance, “inertial force”, “Coriolis force” etc. Another way of dividing class of force is dividing into distance and contact forces. Distance (or field) forces are types of forces in which two interacting objects are not in physical contact with each other (gravitational, electrical, magnetic force). Contact forces are types of forces in which two interacting objects are physically in contact with each other. The contact forces are frictional force, push force, pull force, etc.

Therefore, we can talk about several classes of referential concepts representing different related meanings of a given concept. If there are, in the internal conceptual knowledge system, several related classes of referential concepts to a given concept we speak about the **meaning field** of the given concept. It is necessary to distinguish the term “meaning field” from homonymy, i.e. a situation when a given word has more different meanings (e.g. word “bear” means “animal” or “carry”).

The meaning layer M2 is a **set of designata** – a set of concrete subordinate concepts and semantic images, which may be subordinate to referential concepts of M1 or to core C. These concepts may be on various levels of abstraction from relatively abstract concepts subordinate directly to the referential concepts to concepts expressing concrete objects, phenomena, events, entities, etc. For example, the referential concept “electrostatic force” may have as subordinate concepts attractive and repulsive forces. These can be further differentiated into various concrete forces acting in real situations with different magnitudes and directions. As another example, the referential concept “contact force” may have as subordinate concepts friction forces, pull forces, push forces, binding forces... and these can be further differentiated into forces acting in concrete situations. Designata as concepts may have a complete formal structure, i.e. words, symbols, icons, meanings and sense including links between them. However, designata also involve images without names that usually in a general form reflect concrete perceptions. Finally, some images may be abstract ones which the cognitive agent uses in the process of thinking and cognition.

The meaning layer M3 is a set of concrete images of the objects, phenomena, events, and entities in the mind, which refer to the core C or to the referential concepts or to the elements of M2. Secondly, the meaning layer involves **extension E** of the given concept – the class of **denotata** – objects, phenomena, events in reality and entities to which the word or symbol (sign) of the given concept points.

For instance, the class of denotata of the concept “body” comprises all the bodies in reality. The denotatum for the concept “force” is any concrete force acting between two bodies and the set of denotata comprises all forces in nature.

Denotata that may be directly perceived (e.g. stars, concrete bodies, liquids, etc.) are called **evident denotata**. Besides evident denotata there are also denotata that are not necessarily evident, so-called **non-evident**

denotata. These may be recorded by means of physical experiment and measurement, e.g. fundamental particles (electrons, quarks, neutrons, protons, etc.), forces, energy, entropy, etc. Some physical concepts that are idealized constructions do not have real denotata, for example mass point, ideal gas, ideal solid body, etc. In such cases we talk about **imaginary denotata**, while in reality there are actual objects that differ very little from our images of idealized objects.

Meaning links are links between:

- the core of a given concept and referential concepts;
- the core of a given concept and designata;
- the core of a given concept and denotata;
- cores of referential concepts and designata or images of denotata;
- cores of concepts in the meaning layer M2 and images of denotata.

Sense of concept

No concept in the internal conceptual knowledge system (ICKS) is isolated. It is connected through a great number of links with other elements of ICKS. All links connecting the given concept with other concepts in ICKS (except for the links to subordinate concepts) together with the set S1 (See Fig. 1) comprise its sense.

Sense of concept is composed of the set of assigned concepts S1 and **sense links** from the core of concept to the assigned concepts (Fig. 1). We can divide **sense links** into:

1. Qualitative links – actual, potential and attributive;
2. Cognitive links;
3. Operational links; and
4. Contextual links.

Qualitative sense links are the links to concepts expressing **actual qualities** or features, **potential qualities** and **attributes** (relevant properties) of a given concept.

Actual qualities are features characterizing the concrete denotatum (object, phenomenon, event, entity). An actual attribute of red apple is its red colour. An actual attribute of force is the fact that it is a vector physical quantity.

Potential qualities are properties characterizing denotata of subordinate concepts – referential concepts or designata. The connecting of potential qualities to a given concept results in its differentiation into subordinate concepts. For example, the connecting of potential qualities “motion” and “rest” to the concept “body” results in two disjoint classes of denotata represented by the concepts “moving bodies” and “bodies at rest”. Potential qualities which are possible to connect to the concept “force” are “gravitational”, “electromagnetic”, “nuclear” and the quality expressed by the term “weak interactions.” Thus the general concept of force is differentiated into referential concepts: “gravitational force”, “electromagnetic force”, “nuclear force”, and “weak interaction”. If we consider a different meaning structure, we can differentiate the concept “force” into subordinate concepts by connecting the qualities “fictitious” and “real” to it. The potential qualities of a given concept are actual qualities of subordinate concepts. However, sense links from the core of concept to potential qualities cannot be treated as identical with meaning links from the given concept to subordinate referential concepts. A person can distinguish different referential concepts according to their specific properties, he/she can use words expressing corresponding qualities together with a word expressing the given concept, but he/she does not have to have sufficiently formed concepts of these qualities. For instance, primary school pupils of the sixth grade have formed concepts “gravitational, electric and magnetic force” at a concrete level, but they distinguish them only because of some specific properties. E.g. magnetic force is the force that a magnet exerts upon iron objects, electric force appears after electrifying of plastic ruler and it attracts small papers, fibres, hair, etc. Gravitational force manifests itself by a weight stretching a spring of dynamometer. Pupils usually have the qualities “magnetic”, “electric”, “gravitational” connected so closely with the concept of force that the qualities are not separated in their minds. Separation of the qualities is achieved by the formation of the concepts “electric field”, “magnetic field”, and “gravitational field” as force fields mediating the acting of force. For instance, only about 40 percent of secondary school students (independently of the grade) understand the concept of a magnetic field. Others consider a magnetic field to be only the space surrounding the magnet (Tarábek, 2002)

Attributive links are the links to the concepts expressing attributes of a given concept. **Attributes** of a given concept are relevant properties characterizing the denotata class (objects, phenomena, events, entities denoted by the name of concept). According to these properties we are able to categorize an observed object, phenomenon, or entity into the denotata class (an extension of the given concept). For instance, the concept “body” has as an attribute its mass. The concept “liquid” has the attributes constant volume and variable shape. Force has as an attribute the fact that it expresses mutual interaction of physical bodies (or bodies and fields). An apple has an

attribute: it is a fruit of an apple tree. A coniferous tree has as an attribute needles, a deciduous tree has as an attribute leaves. Attributes are used in definitions together with superordinate concepts. For instance, in the definition “Body is a mass object”, “object” is a superordinate concept, “mass” is an attribute. In the definitions “Solid body is a mass object with constant volume and shape” or “Liquid is a mass object with constant volume and variable shape”, “mass object” is a superordinate concept and “constant volume”, “constant/variable shape” are attributes.

Cognitive links are links between the core of the given concept and concepts that are related to physical or natural law (rule, principle) together with this concept. For instance, if we consider Newton’s second law in the form: $F = m \cdot a$, students have a cognitive link from the concept “force” to the concept “acceleration” if they understand that “force causes change in motion”. I.e. the piece of knowledge in the specific thinking of the student has the form: “force causes acceleration or deceleration of body’s motion or curving of its trajectory”. Such a cognitive link was found only in 23 – 32 percent of secondary school students (from seventh grade up) and the dependence on the age of respondents was very small. It was demonstrated that even if students know Newton’s second law and they are able to use it in problem solving they do not have to understand the connection between force and acceleration as “force causes acceleration or deceleration of body’s motion or curving of its trajectory”. For instance, approximately half of upper secondary students of the twelfth grade know Newton’s second law, and around 30 percent can apply it in a solving of physical problems, but only one third of these students know that “force causes change in motion (i.e. acceleration, deceleration or curving of trajectory)”. Similarly, it was shown that knowledge of Ohm’s law: $I = U/R$ and its application to various tasks does not mean that students are conscious of the cognitive link of inverse proportionality between current and resistance: $I \sim 1/R$.

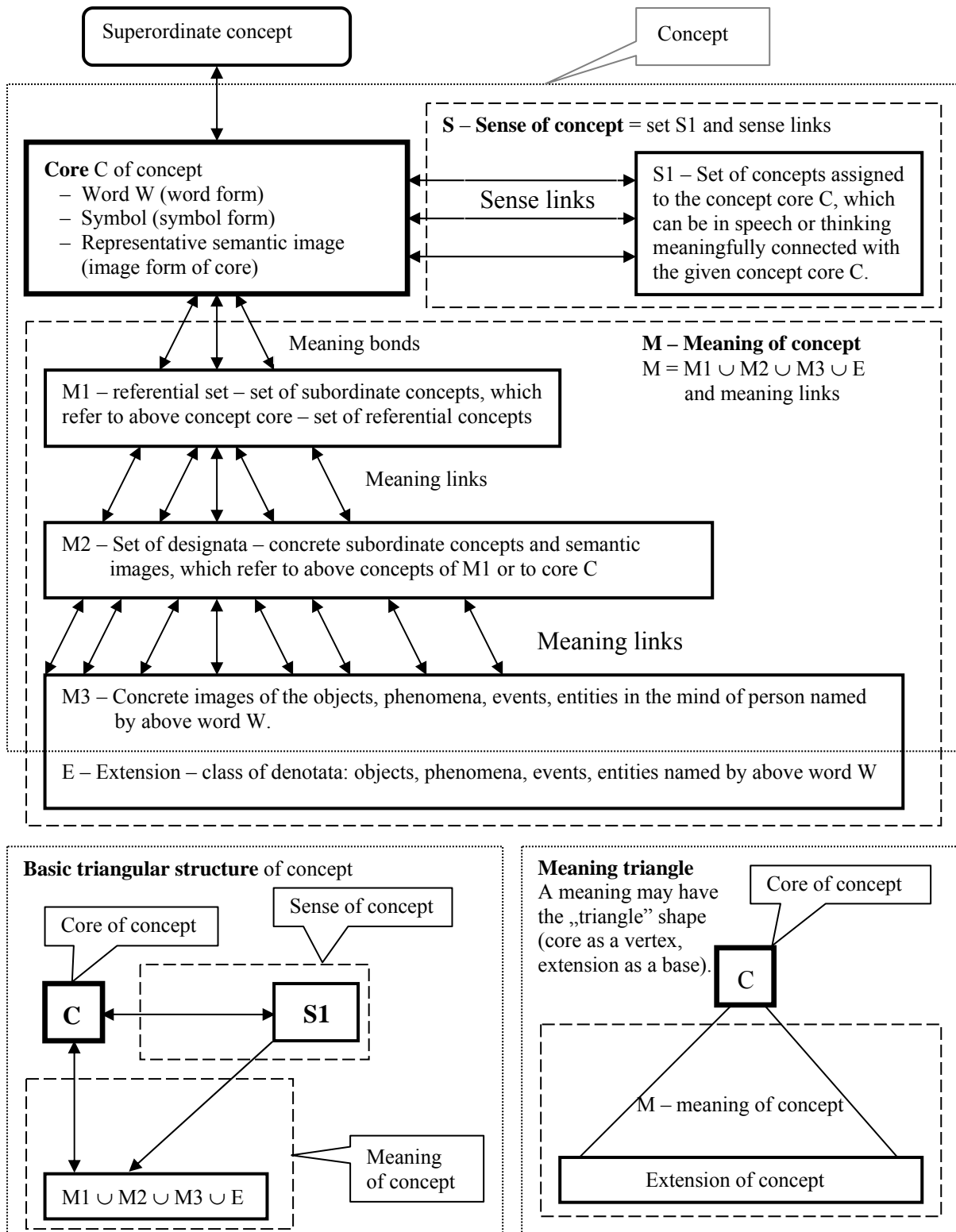
It was also shown that pupils in the seventh grade of secondary schools know the formula for the calculation of the circumference of a circle $O = 2\pi R$ and they can calculate it, but only a small part of them (around 16%) understands that the circumference of circle is 2π -times greater than its radius (Tarábek, 2005).

Operational links are the links between the core of the given concept and concepts that belong to physical or mathematical definitions together with the given concept. These links are expressed by the so-called **operational definitions** or operational assignments, which are realized by thought operations. Operational links exist in the mind of a learner if he/she knows how to “read” the definitions. For instance, if a student knows how to “read” the definition $s = v \cdot t$ (path equals product of steady speed and time), in the structure of his/her concept of „path” there are the links $s \sim v$ (path of steady motion is directly proportional to the speed of motion) and $s \sim t$ (path of steady motion is directly proportional to the length of time interval). If student knows how to read the definition $a = dv/dt$ (acceleration is the derivative of speed with respect to time), he/she knows and understands that “acceleration is directly proportional to the differential change in speed” and “inversely proportional to the differential change in time”.

Contextual links are the links between the core of a given concept and all other concepts that may be meaningfully connected with the given concept in statements, propositions, sentences etc. This term does not design qualitative, attributive, cognitive and operational links. For instance, the concept “force” can be meaningfully connected in sentences with the concepts “motion”, “action”, “field”, “space”, “time”, etc. Contextual links between concepts are realized in arranging words into meaningful statements. Clearly, the sentence: “The car has green leaves” is meaningless, because there is no contextual link between the concepts “car” and “green leaves”. Contextual links enable us to create predicates – verbal statements concerning attributes, laws, definition assignments and also statements concerning meaningful links from a given concept both downwards and upwards.

Figure 1: Triangular model of concept structure

Rectangular boxes represent components of concept structure (C – core, S1, M1, M2, M3, extension); dashed boxes represent subsystems (meaning and sense), dot boxes represent concepts, and arrows represent links between components of concept structure.



3. Vygotsian phases of concept formation

Vygotsky (1986) distinguishes three major phases of spontaneous concept formation: syncretic images or “heap”, complex and pseudoconcept. The phase “complex” comprises several types: association, collection, chain complex, diffuse complex. It was found out that the formation of scientific concepts in the minds of students in the course of education process can go through three phases: complex, pseudoconcept, and concept (Gregušová, 1986, Mlčúchová, 1988). The first version of the model of concept structure was used in the research (Tarábek, 1988).

Description of the Vygotsian phases of concept formation by the triangular model

In the studies, where the first version of model of conceptual structure was used (Tarábek, 1988), it was found out that the development of scientific concepts in the minds of students during instruction process can also pass through the phases of complex and pseudoconcept before the complete concept was formed (Gregušová, 1986, Tarábeková, 1988, Mlčúchová, 1988). Mlčúchová’s and Tarábek’s papers, 1988 have distinguished three Vygotsian stages of the concept “conductor of electric current” in the answers of eighth to twelfth grade students to the question: “Electric current can flow through and only through:”. The results are presented in the table 1.

Complex level answers were characterized by correct examples of conductors (copper, bulb, metals, electrolytes, water...) together with occasional (not all respondents) incorrect examples (signal, sound, light). The percentages of complex level answers are shown in the column 3.

Pseudoconcept level answers were characterized by correct examples on the level of referential concepts (metals, electrolytes, ionized gases) occasionally supplemented with semantic images as examples of individual referential concepts (e.g. metal – copper, iron; electrolyte – acid in accumulator). The percentages of pseudoconcept level answers are shown in the column 4.

Concept level answers were characterized by definitions, e.g. “Electric current flows through all materials containing free charged particles.”, “Electric current flows through all matters containing free electrons.”, while some students supplemented their answers with particular examples of electric conductors. The percentages of concept level answers are shown in the column 5.

During the instruction process in five years of upper secondary school (grades 8 to 12), the percentage of **complex phase** answers decreased from 62 % to 25% and the percentage of **pseudoconcept phase** answers increased from 29 % to 59 % (see Table 1). The percentage of **concept phase** answers slightly increased from 3 % to 12 %. Similar developments were recorded in research oriented to the formation of other physical concepts in the course of five years of upper secondary school (grades 8 to 12).

Column	1	2	3	4	5
Number of respondents – N	N	no answer or not to understand	complex phase answers	pseudoconcept phase answers	concept phase answers
Age of respondents					
Grade 8	315	6,3 %	61,9 %	28,9 %	2,9 %
Grade 9	200	3,0 %	55,5 %	33,5 %	8,0 %
Grade 10	218	0,4 %	36,1 %	55,0 %	10,5 %
Grade 12	200	4,0 %	25,0 %	59,0 %	12,0 %

The papers by Gregušová (1986), Mlčúchová (1988) and Tarábeková (1986) have explored the development of the concepts “conductor of the electric current”, “electric current”, “electric voltage”, “electric field”, “magnetic field” and “force” in the course of the sixth to twelfth grade. Based upon the cognitive analysis of these concepts by means of the triangular model and the paper by Vygotsky (1986), we have distinguished the following four phases of an incomplete concept structure preceding the fully formed concept:

1. The **lower complex** is characterized by the core comprising only the word – the name of the concept. The meaning layer M3 may have a greater number of the elements than M2. In other words, every designatum corresponds to only one denotatum and some images of the denotata are linked directly to the core. The cognitive agent does not have any name for some images. On the other hand, the agent does not have to have an image for every denotatum. The number of the elements of M2 is very low – often only one or two. Besides the correct designata and images of the denotata, the meaning often contains incorrect designata and images. The contextual links are usually missing.

2. The **higher complex** is characterized by the core comprising besides the word also the representative semantic image – the image prototype characterizing the class of denotata. The image does may be incomplete and it may involve incorrect characteristics. The meaning layer M3 contains more elements than M2, i.e. one designatum is linked to several images of the denotata. The designata also involve the concepts that may later become referential concepts, i.e. the learner does not distinguish the concepts on the different hierarchic levels yet. The contextual links are already developed, so the learner is able to describe verbally the connection of a conductor to a source or a bulb, etc. No phase of the complex has the superordinate concept linked to the given complex.
3. The **lower pseudoconcept** is characterized by the core having the complete representative semantic image – the prototype with the correct and clear characteristics. It has a hierarchically arranged structure of the meaning layers M1, M2 and M3, while M1 and M2 do not contain all elements characterizing the fully developed concept. The lower pseudoconcept does not have the sense links to the potential qualities, so its referential concepts are not fully developed concepts. There may be the link to the superordinate concept, but the sense of the concept does not contain all attributes, and the attributive links are insufficiently developed, so the definition in terms of the superordinate concept and the attributes is incomplete or entirely incorrect.
4. The **higher pseudoconcept** is characterized by the core having the complete representative semantic image – the prototype with the correct and clear characteristics. It has a hierarchically arranged complete structure of the meaning layers M1, M2 and M3 and the sense links to the potential qualities, which divide the concept into the referential concepts as fully developed concepts. Although there is the link to the superordinate concept, the sense of the pseudoconcept does not have fully developed attributes, so the definition in terms of the superordinate concept and the attributes is incomplete. The higher pseudoconcept is similar to the completely developed concept with the following difference: it is impossible to define it correctly in terms of the superordinate (more abstract) concept and the attributes.

We will call the phases of the development of a scientific concept described above the **Vygotian phases of the concept development** and the process of their development will be called CPC-process (CPC = Complex → Pseudoconcept → Concept). The original Vygotian phases describe only the sense of the concept and the sense links to the potential qualities (Vygotsky, 1986). The Vygotian phases formulated above also describe the core of the concept and the cognitive and contextual links.

The complete concept involves all elements and developed links including the link to the superordinate concept. The exceptions are the scientific **primary concepts**, which cannot have any superordinate concept since they are on the highest level in the hierarchy of concepts. In terms of the primary concepts the **secondary concepts** are defined, and in terms of them the concepts on the lower level in the hierarchy of concepts. In the mechanics, the primary concepts are e.g. the matter, time, space, state, body, etc. In the theoretic mechanics, a primary concept is the force, which is not a primary concept in the classical mechanics since it has a superordinate concept.

In the development of the concepts passing through the Vygotian levels, the concrete concepts – having two meaning layers at most, i.e. without the layer M1 – attain the stage of the complete concept much sooner than the abstract concepts, which are much higher in the hierarchy of the concepts. For instance, in the development of the concept „the metal wire as a conductor of the electric current“, the stage of the lower complex was found out from the statements of a four-year old child: “A wire (wrapped in insulation) is connected to a battery, so that the electricity gets to the bulb”. „We do not plug a nail into a socket to prevent „electricity kick (electricity shock)”. This stage is characterized by the designata and images of the denotata on the same level, while the sense contains also incorrect denotata, e.g. (non-conductive) cable, which the child used for connecting an appliance (hair drier) to a model of an electric socket (with no electricity in it). The same child aged 6 years knew that the conductors of electricity comprise only metal wires and he/she knew to state several examples (wire of a bell, conductor from a lamp, starting cables, but also other matters as, e.g. water), so his/her concept was developed on the level of the higher complex. A 12 – 14 years old child may know that “the conductors of the electricity are all metal wires” and distinguish thin wires (worse conductors) from broad wires (better conductors), and insulated wires (which may be grasped) from uninsulated wires (which cannot be grasped in case they are plugged). He/she distinguishes wires from different metals, because he/she knows the copper, iron, aluminum dividing the class of the metal cables into corresponding subclasses. We can say that his/her concept “the metal wire as a conductor of the electric current” is at least on the level of the pseudoconcept. If the pupil knows that the electricity also flows through other matters (water, acids) and he/she has the concept „the conductor of the electric current“ developed at least on the level of the higher pseudoconcept, then the concept “the metal wire as a conductor of the electric current” is fully developed.

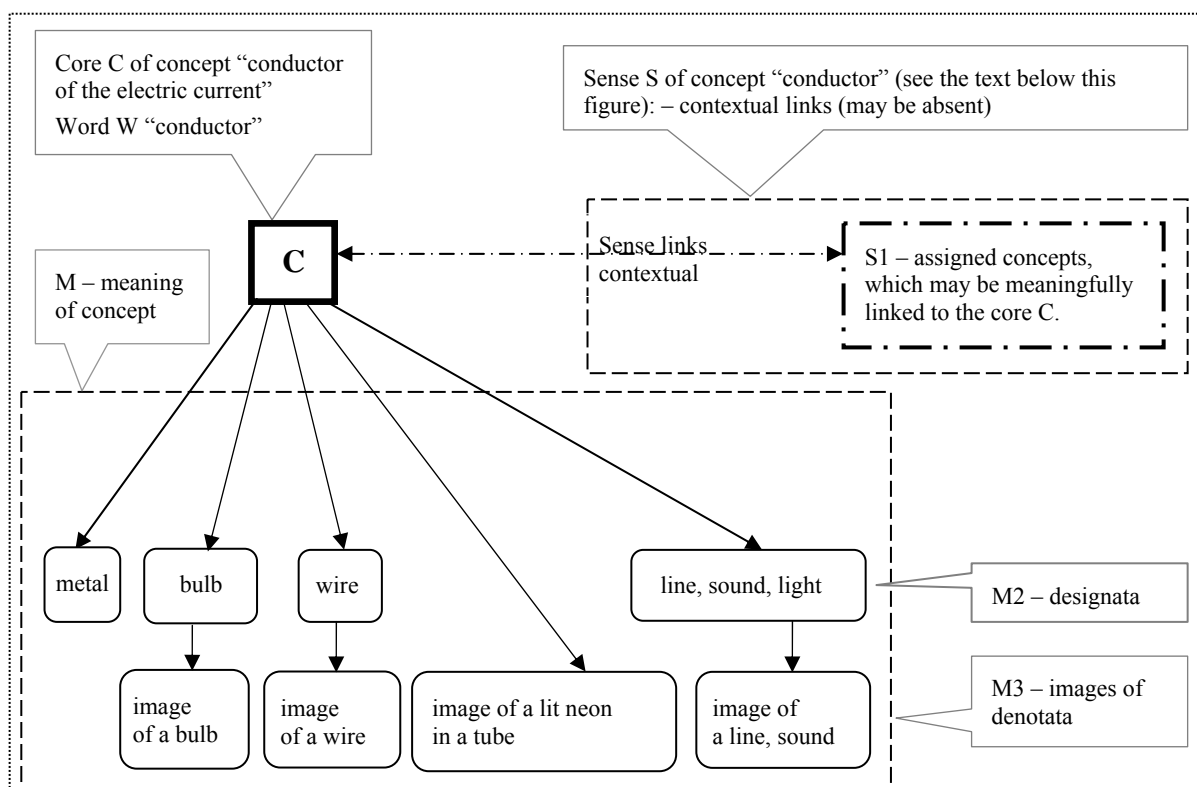
In conclusion, we have to say that the classification of the complex and pseudoconcept into two subcategories is only approximate and it does not express all possible variations in the development of the children’s concepts. Furthermore, the absence of the analysis of the development with respect to the cognitive, operational and contextual links suggests that there may be more lines and levels of the concept development.

Vygotian phases of the formation of the concept “conductor of the electric current”

The diagrams of the triangular models of the concept „conductor of the electric current“ in the phase of the lower and higher complexes, lower and higher pseudoconcepts and the fully developed concept are depicted in the fig. 2.1 – 2.5. The diagram 2.6 shows the triangular model of the concept „matter“, which is superordinate to the fully developed concept “conductor of the electric current”, whereas it is missing in pseudoconcepts and complexes.

Figure 2.1: Triangular model of the complex “conductor (of the electric current)”

The model represents the concept in the phase of the lower complex. The boxes represent the components of the concept structure (C – core of the concept, the set S1); the dashed boxes represent the subsystems (meaning and sense); the oval boxes represent the designata and the images of the denotata; the arrows represent the links between the elements of the concept structure; the dotted box represents the whole concept “conductor of the electric current”; the dotted-dashed box represents S1 and dotted-dashed link the sense links expressing the fact that the complex does not have to have the developed sense.



The core C of the lower complex „conductor (of the electric current)“ comprises the word „conductor“.

The representative semantic image for the lower complex is not developed yet. It is substituted by an inaccurate and incomplete image, e.g. electric cable or line – a prototype, which also has incorrect characteristics. According to them the child also includes into the sense the denotata, which do not belong under the denotation „conductor of the electric current“, e.g. a rope or line resembling a conductor.

The complex does not have any superordinate concept.

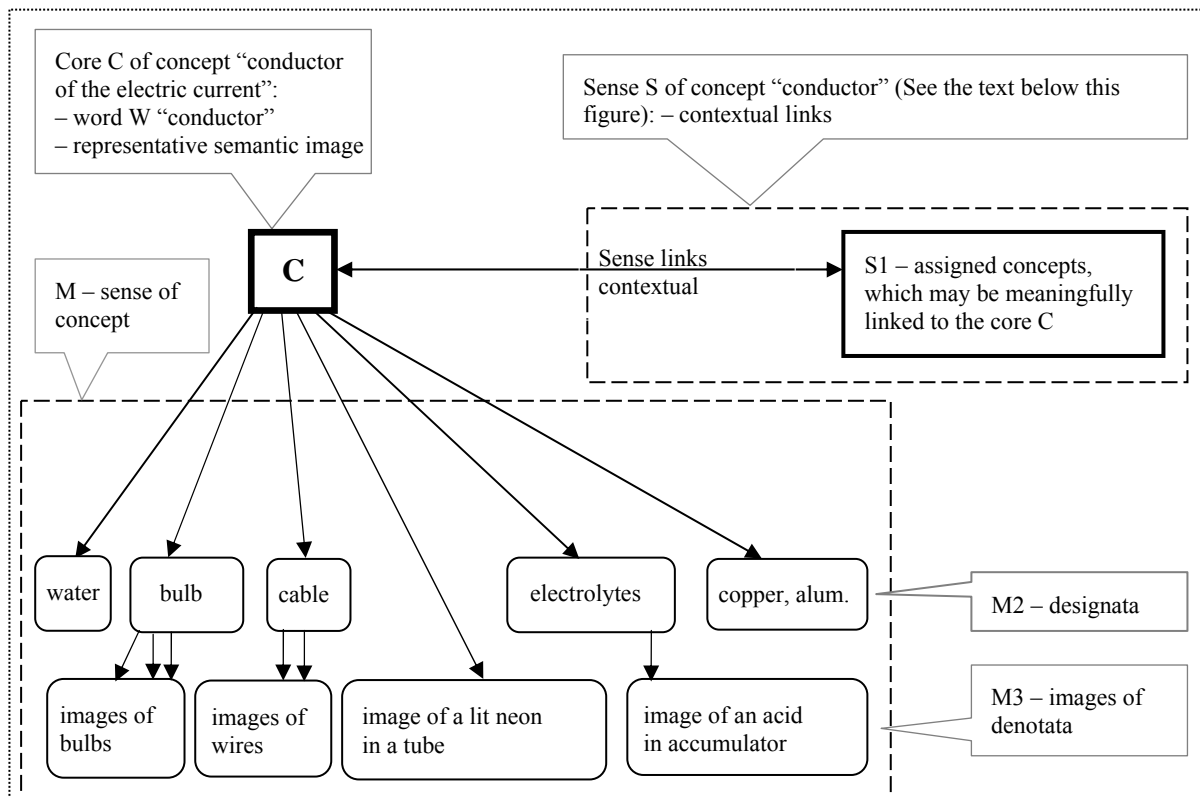
The sense S of the lower complex “conductor of the electric current” may consist of:

- the contextual links to the concepts “to flow”, “bulb”, “battery”, “electric circuit”, etc., in case the learner understands the statements: “Electricity flows through conductor.” “Conductors connect bulb, battery and switch in an electric circuit”. These contextual links may be absent in case the learner states: “Current flows through wire.” or “Bulb, battery and switch in electric circuit are connected through wires.” In such case the concept “conductor” does not have the developed sense yet – it is depicted by the dotted-dashed box S1 and the arrow representing the sense links.
- The sense is developed (not always) only for the subordinate concepts – designata.
- the qualitative links to the potential qualities – “solid”, “liquid”, “gas” are not developed.
- the attributive link to the term “free electric particles” does not exist.

The meaning M of the complex has at most two developed meaning layers: the layer M2 of the designata and the layer M3 of the specific images of the denotata. The learner does not distinguish the referential concepts from designata and includes them into the layer M2. Some images of the denotata are linked directly to the core and some designata may have no associated image. The sense also contains incorrect designata, e.g., sound, signal, link etc.

Figure 2.2: Triangular model of the complex “conductor (of the electric current)”

The model shows the concept in the phase of the higher complex. The boxes represent the components of the concept structure (C – core of the concept, the set S1); the dashed boxes represent the subsystems (meaning and sense); the oval boxes represent the designata and the images of the denotata; the arrows represent the links between the elements of the concept structure; the dotted box represents the whole concept “conductor of the electric current”.



The core C of the higher complex “conductor (of the electric current)” consists of the word “conductor” and the representative semantic image – the image of the specific conductor, e.g. the image of a cable, wire, etc., which is a prototype with predominantly correct characteristics.

The complex does not have any superordinate concept.

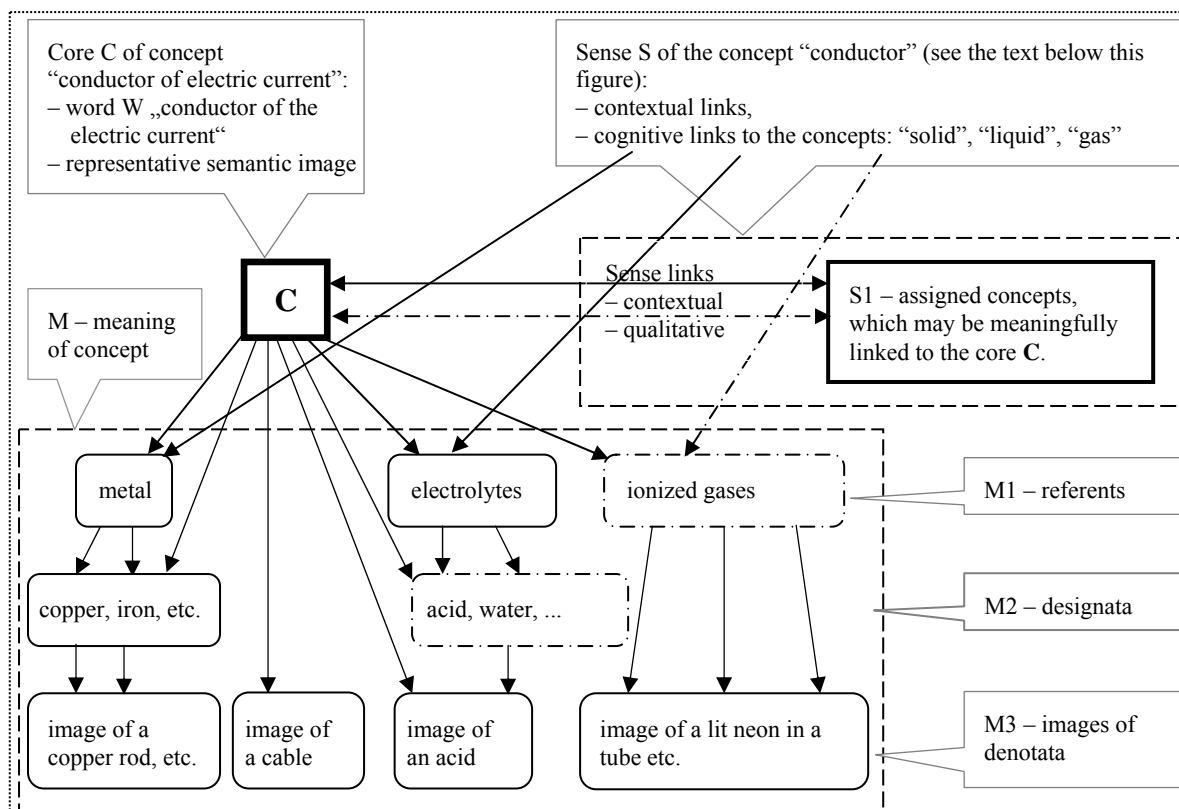
The sense S of the complex “conductor of the electric current” consists of:

- the contextual links to the concepts “to flow”, “bulb”, “battery”, “electric circuit”, etc., i.e. the learner is able to state: “Electric current flows through the conductor.” “Conductors connect bulb, battery and switch (in an electric circuit)”. He/she understands the fact that the current flows from source to bulb only if the cable is connected both to the bulb and to the source. Nevertheless, he/she does not have to have an image of the closed circuit as a condition for the flow of the electric current. He/she is surprised, when the bulb is not lit, because he/she connected it to the source only through one cable.
- Qualitative links to the potential qualities – “solid”, “liquid”, “gas” are not developed.
- The attributive link to the term “free electric particles” does not exist.

The meaning M of the complex has at most two developed meaning layers: the layer M2 of the designata and the layer M3 of the specific images of the denotata. The learner does not distinguish consistently the referential concepts from the designata and includes them into the layer M2. Some images of the denotata are linked directly to the core.

Figure 2.3: Triangular model of the pseudoconcept “conductor (of the electric current)”

The model shows the phase of the lower pseudoconcept. The boxes represent the components of the concept structure (C – core of the concept, the set S1); the dashed boxes represent the subsystems (meaning and sense); the oval boxes represent the referents, designata and the images of the denotata; the arrows represent the links between the elements of the concept structure; the dotted box represents the whole concept “conductor of the electric current”. The dotted-dashed oval boxes and arrows indicate that the corresponding subordinate concepts, as well as the sense links to the potential qualities, do not have to be developed.



The core C of the pseudoconcept “conductor (of the electric current)” consists of the word “conductor”, or the word “conductor of the electric current”, and the representative semantic image, which may be the image of a specific conductor, e.g. the image of a metal cable, insulated wire, uninsulated wire, etc.

The pseudoconcept does not have the link to the superordinate concept yet.

The sense S of the pseudoconcept “conductor of the electric current” consists of:

- the qualitative links to the potential qualities – “solid”, “liquid”, “gas”, which divide the set of the electric conductors into the corresponding subsets. In case the referential concepts are not fully developed, the concept of conductor of the electric current does not have fully developed the potential qualities. This is indicated by the dotted-dashed arrows.
- the contextual links to the concepts “to flow”, “bulb”, “battery”, “electric circuit” “source of current”, “accumulator”, etc., because the learner is able to state: “Current flows through the conductor.”, “Conductors connect the bulb, battery and switch in an electric circuit”.
- the attributive link to the term “free electric particles” does not exist yet. The learners are not able to formulate for example the following definition: “Conductor is a matter, which contains free electric particles.”

The meaning M of the pseudoconcept does not have fully developed all three meaning layers M1, M2, M3 – this is indicated by the absent or dotted-dashed boxes. Furthermore, the learner does not have a clear hierarchy of the referential concepts, designata and denotata, and he/she insufficiently distinguishes between them. Therefore, some of the designata are not subordinate to the referential concepts, but they are linked directly to the core instead, and similarly, some images of the denotata are not subordinate to the designata, but they are directly linked to the core.

Figure 2.4: Triangular model of the pseudoconcept “conductor (of the electric current)”

The model shows the phase of the higher pseudoconcept. The boxes represent the components of the concept structure (C – core of the concept, the set S1); the dashed boxes represent the subsystems (meaning and sense); the oval boxes represent the referents, designata and the images of the denotata; the arrows represent the links between the elements of the concept structure; the dotted box represents the whole concept “conductor of the electric current”.

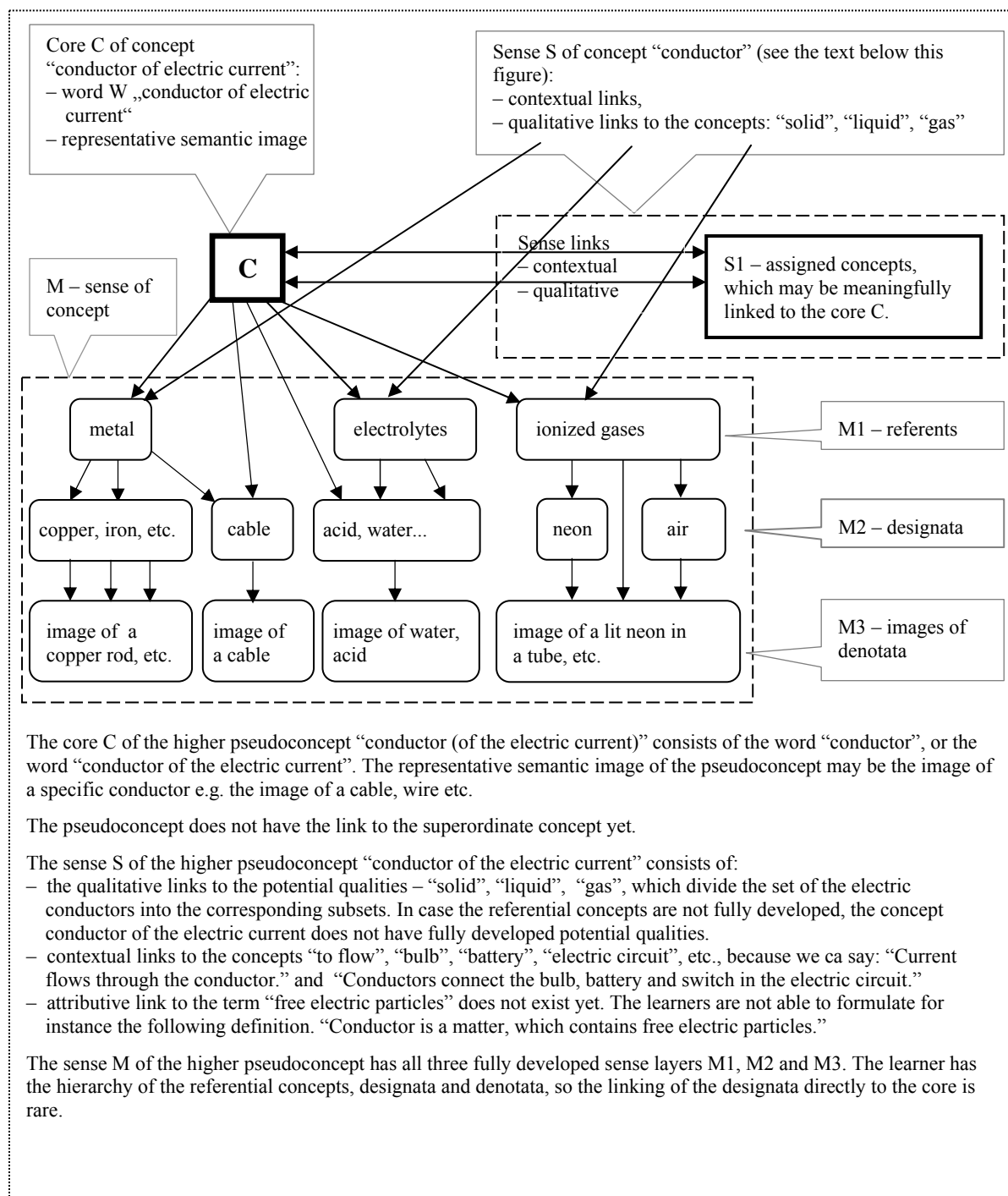
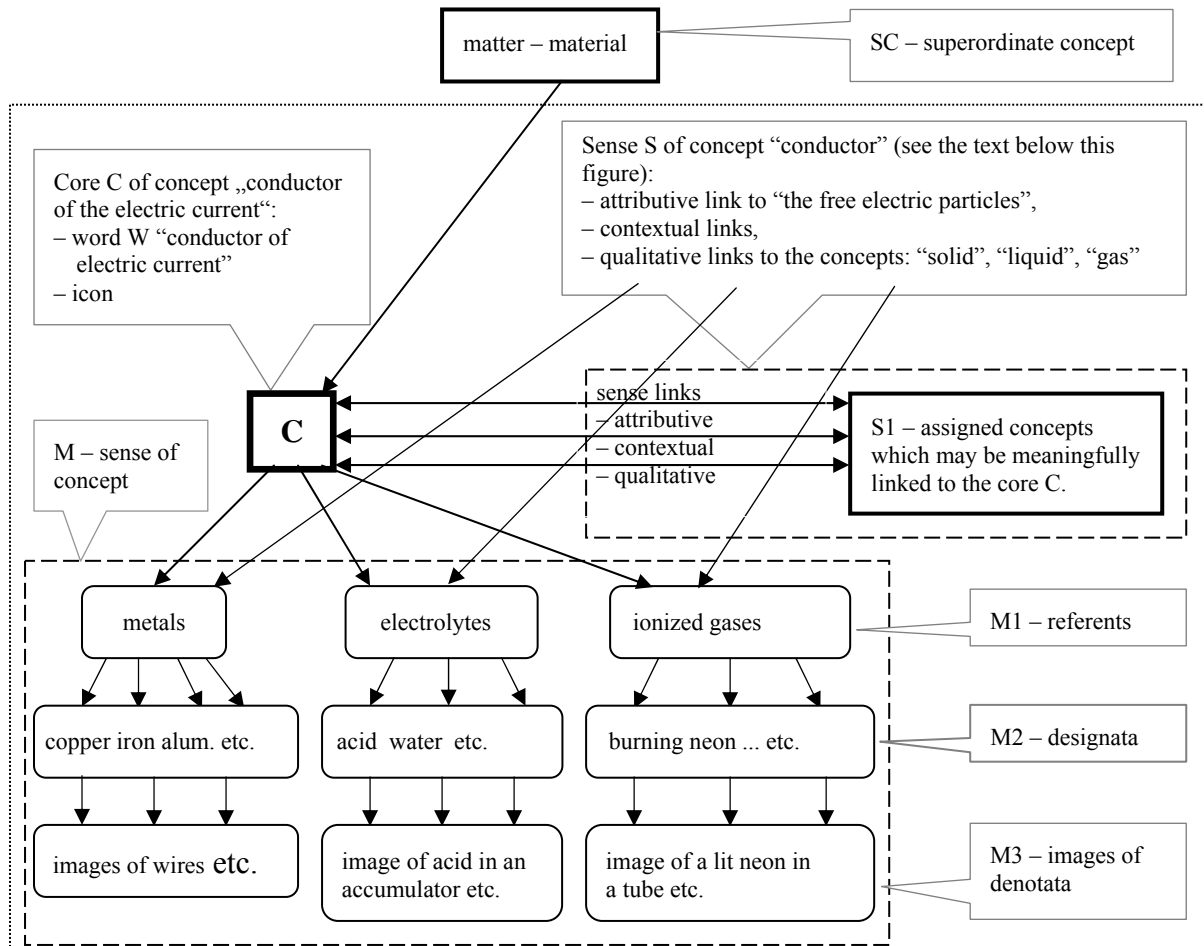



Figure 2.5: Triangular model of the concept “conductor (of the electric current)”

The model shows the fully developed concept. The boxes represent the components of the concept structure (C – core of the concept, the set S1); the dashed boxes represent the subsystems (meaning and sense); the oval boxes represent the referents, designata and the images of the denotata; the arrows represent the links between the elements of the concept structure; the dotted box represents the whole concept “conductor of the electric current”.



The core C of the concept “conductor (of the electric current)” consists of the word “conductor”, or the word “conductor of the electric current”. This term is not a physical quantity, so it does not have any symbol. The representative semantic image has the form , which is an electro-technical symbol for conductor.

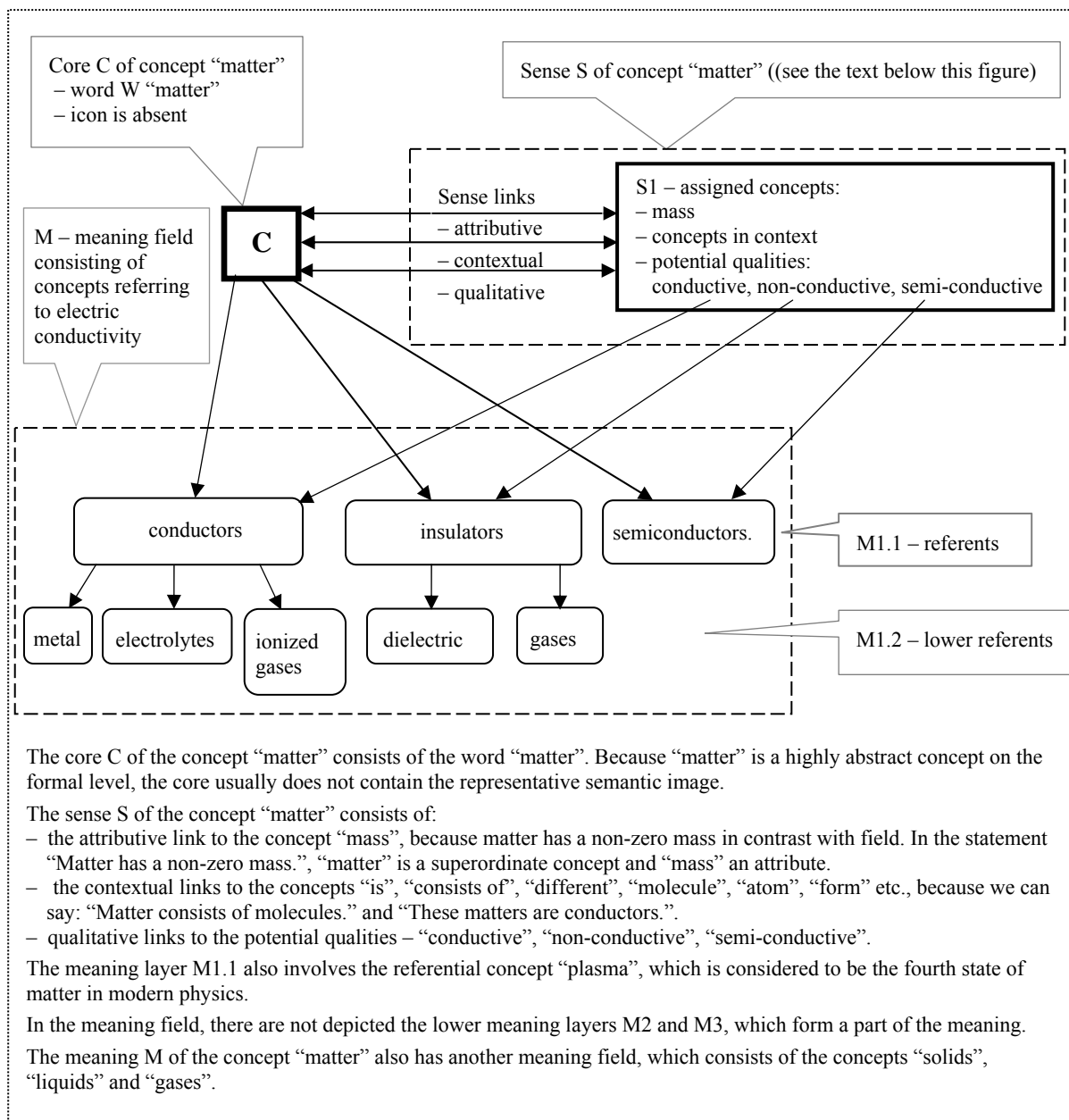
The sense S of the concept “conductor of the electric current” consists of:

- the attributive link to the term „free electric particles“. In the definition “Conductor is a matter, which contains free electric particles.” is “matter” superordinate concept and “free electric particles” an attribute.
- the qualitative links to the potential qualities – “solid”, “liquid”, “gas”, which divide the set of the electric conductors into the corresponding subsets.
- the contextual links to the concepts “to flow”, “bulb”, “battery”, “electric circuit”, etc., because we can say: “Current flows through the conductor.” and “Conductors connect the bulb, battery and switch in an electric circuit.”.

The meaning M of the fully developed concept has all three fully developed and hierarchically arranged meaning layers M1, M2 and M3.

Figure 2.6: Triangular model of the concept „matter“, which is superordinate to the concept “conductor of the electric current”

The boxes represent the components of the concept structure (C – core of the concept, the set S1); the dashed boxes represent the subsystems (meaning and sense); the oval boxes represent the referents, designata and the images of the denotata; the arrows represent the links between the elements of the concept structure; the dotted box represents the whole concept “matter”.



4. Developmental levels of mathematical and physical concepts

The triangular model of the concept structure describes the basic elements and links of the concept structure. The individual concepts of the external and internal conceptual knowledge systems do not have to contain all elements of their structure in specific cases, particularly in the development of the scientific concepts in the history of sciences and in the education process. The analysis of the historical development of the external conceptual knowledge systems leads to the distinguishing of several developmental levels of the physical and mathematical concepts (see the figure 3). Some of these levels were identified in the study of the concepts of the primary school pupils and secondary school students (Tarábek, 2005a, Tarábek 2007a, 2007b). The levels of the concepts described in the text below have different characteristics depending on the analyzed course of development. The following three courses of development have been studied so far:

1. the development of the external conceptual knowledge systems in physics,
2. the development of the mathematical concepts,
3. the development of the internal concepts of children in the language environment of the pre-school and school education.

Therefore, the first two courses of the concept development have been denoted differently in agreement with their characteristics. In this paper, we will attempt to unify the terminology with the original terms left as the local terms for the individual courses of development.

Primitive level of concept

The primitive level of concepts corresponds to the primitive empirical level of the conceptual knowledge systems.

The primitive empirical level of the external conceptual knowledge systems (ECKS) is the level of the cognition coming directly from the experience, where the cognitive universe is reality. The set of the concepts consists of the file of poorly differentiated specific concepts on a low level of abstraction with the dominant meaning links. The concepts do not form a hierarchical system yet. The set of the links Re consists of the file of evident empirical experiences – generalizations of the classes of specific observed and perceived facts. The facts concern the observed phenomena, their course, attributes, connections, etc., as well as the properties of objects. This level of ECKS is the first level of the spontaneous empirical cognition of the nature, which is not scientific yet, although it enables the basic orientation in the world and thus guides the behavior of the cognitive agents. The primitive empirical level existed in the first stages of development of the human communities.

Human effort leads to the creation of proper names of the originally unnamed objects, phenomena, plots and situations. Later in the course of concept development, the names of classes of denotata were created. The representative semantic images were incomplete, inaccurate and did not express all characteristics of a given class of denotata. Because these concepts express the primary empirical generalizations concerning the observed objects, phenomena and plots, we can denote them as the concepts on the primitive empirical level.

In relation to the internal conceptual knowledge systems, we can talk about the lower empirical level corresponding to the common experience of a human being and the specifically used natural language. The concept structure is dominated by the meaning links to reality; the sense links are restricted to the contextual links of the natural language and some qualitative links (other links are only few). The core of concepts contains predominantly incomplete representative semantic images and words; in some cases ICKS involves concepts without any name. The experience, as the lowest form of knowledge, has the form of space-time links (often incorrect). Other types of links include primarily causal links, which are observed first in the human community and subsequently in the nature. The set Re also includes the experience expressing the attributes of the objects and plots – the qualitative links. The experience of the localization and procedural links concerns the distribution of the objects of the surrounding world and their behavior – processes. The dominant approach to reality is the relational approach – i.e. the search for the relations and links between the objects, phenomena and plots.

The mathematic concepts are formed in the environment of the natural language by means of listening to the names of mathematical objects and phenomena and assigning corresponding images to them. Because the images are dominant for determining the membership in the class of denotata, we can talk about the visual level of development of the mathematical concepts. For instance, in the beginning of its development, the concept of a natural number comprise the image of the number of specific objects, which is in the mind linked to the corresponding name, e.g. “one candy”, “two candies”, etc. In the first stage, children use just the three numerals: “one”, “two” and “many” (or “all”), which are fixed to the corresponding word denoting the object – finger, candy, marble ... – similarly to the first stages of development of the human society. Gradually, the number of the used numerals increases and their names may be disconnected from the names of the objects they were originally linked to. This becomes evident by linking the names of numbers to other objects.

In case the learning of a language or the education process is not accompanied by a sufficient imagination (if the learning is not visual), the concepts acquire a different structure.

If a student reads or learns a definition of a term without the sufficient amount of illustrative examples, he/she knows its name, link to the superordinate concept and qualities, but the images assigned to the name are only indefinite and vague. In such cases the concept does not have any representative semantic image.

Similarly, a child listening to a speech of adults may remember a given word or phrase in connection with a specific situation, phenomenon or plot. Subsequently, he/she uses the remembered word or phrase to name a situation, phenomenon or plot resembling the former one and thus he/she verifies the validity of the name. The original fixing of a specific word or phrase to a specific image is not always correct, because the specific syncretic thinking of the child also adds incorrect and indefinite characteristics to it. We often witness the so-called “child mistakes”, when a word, phrase or sentence is used inappropriately. After learning a language, the child may have many contextual links to a given word, so that he/she is able to use it correctly – mainly in the language environment with many stimuli. His/her speech is developed, but the object content of the used concepts is poor – the meaning of these concepts contains just a narrow class of denotata. The structure of these concepts resembles the shape of the letter “T” – they have a narrow meaning area and a wide net of contextual links. Therefore, we can call them the “T-concepts”.

The concepts on the primitive level formed in the environment of the natural language or in the education process are characterized by the word as the dominant element of their core. Therefore, we call them the word concepts or W-concepts.

Empirical/imaginative level of concept

The **empirical level** of ECKS is in the initial stages of the extensively developing fields of science characterized in the concept area by sorting the extensive file of studied objects and phenomena, differentiation, classification, increasing the level of abstraction, and creation of a hierarchical system of concepts. Typical for the transition from the lower to the higher empirical level is the sorting approach.

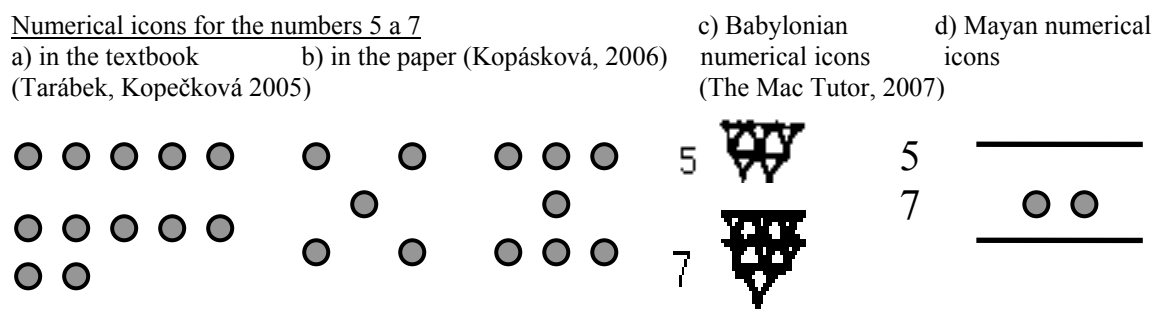
In the case of the basic sciences, for example physics, there is created a special group of generally described objects and phenomena. These are described by the concepts, which have strong meaning links to reality however many concepts have created sense links in the full range. This is evident from the creation of verbal definitions and operational assignments. All attributes of objects and phenomena are studied, i.e. the set of qualitative links is extended, and in connection with the development of the knowledge area, the cognitive links are created. The core of concept consists of the word and representative semantic image. In physical conceptual knowledge systems, this level is also called the **empirical concept level**. In mathematical conceptual knowledge systems, this level is also called the **imaginative concept level**.

In the cognitive field, besides the relational approach, there is also exploited the lawfulness approach, i.e. the cognitive agent searches in the studied universe certain laws. These laws have the form of the so-called „laws of phenomenon“, or empirical causal laws of the type “phenomenon-phenomenon” or “entity-phenomenon”. The laws of phenomenon are formulated as simple factual statements describing the attributes and behavior of the objects, the course of phenomena, etc. In connection with Aristotle, these statements are of the type “Heavy bodies fall downwards and light bodies (smoke) rise upwards.”, “Bodies fall downwards faster if they are heavier, and slower if the resistance of the environment (determined by size of the body and the density of the environment) is greater.” It is obvious that these are generalizations of empirical experiences coming directly from observation. Similarly, the laws of the type „phenomenon-phenomenon“ or “entity-phenomenon” are formulated as simple factual statements describing the lawful links between specified classes of elements of reality. A typical causal law of the type “phenomenon-phenomenon” is the explanation of the floods on the river Nile by Thalet and Anaxagoras. Thalet claims (incorrectly) that the trade winds blowing against Egypt raise the water in Nile, while Anaxagoras claims that “Nile raise in the summer due to the melting snow and heavy rains.” An example of the causal law of the type “entity-phenomenon” is the Aristotle’s statement about “the force as the cause of the motion”. These are the so-called forced motions – Aristotle divides motions into the natural and forced ones – caused by forces. On the empirical level of ECKS, there are also the first principles, e.g. the principle of causality, which is the basis of the causal approach to reality.

At the empirical level of the ECKS, there are besides the empirical laws also created simple verbal-imaginative models of the observed reality, as for example the model of nature composed of atoms by Democritus, the model of the universe by Herakleitos, the model of the development of the four seasons, etc. These models have an explanatory function, i.e. they should explain the observed phenomena.

With regard to the need of notation of the mathematical concepts, there are created visual forms of the representative semantic image – icons. Therefore, we also talk about the **iconic level** of concepts. The icons, in

the course of development, quickly transform into numerals. The typical icons represent for example Babylonian numerals, Mayan numerals, but also the geometrically arranged diagrams of dots (circles) used in the course of mathematics instruction in the first grade.



Imagination in the transition from the first to the second developmental level means creation of the representative semantic image in the core of the concept. The representative semantic image is the visual prototype of the concept containing the characteristics of the class of denotata. It is very important, because it enables correct using of the concept according to the characteristics of the prototype. Therefore, we also call the concepts at empirical/imaginative level the **image concepts** (I-concepts).

Symbolical level of concept

The **symbolical level** is attained by those scientific concepts on the parametric level of the external conceptual knowledge systems, which express physical and mathematical quantities.

Parametric level of the conceptual knowledge systems

The parametric level of the external conceptual knowledge systems is characterized mainly by the fact that the natural (physical) laws are described by the mathematical language as relational or functional links between the (physical) quantities. The laws, which had on the lower – empirical level the verbal form, attain by means of the process of parametrization on this level the so-called parametric form (Tarábek, 1985) expressed usually by the functional dependence $F = (h_1, h_2, \dots, h_n) = 0$, where h_i ($i = 1, 2, \dots, n$) are the values of the parameters S_1, S_2, \dots, S_n describing the natural laws, processes, attributes of the objects, phenomena and the like. On the parametric level, the nature becomes for the scientists the universe, which may be mathematically described. Indefinite verbal concepts are exchanged for the accurate concepts of the physical quantities (Tarábek, 1988). Typical parametric physical laws are e.g. the Galileo's law of free fall, Kepler's laws, Gay-Lussac's volume law for gases, Proust's law and Dalton's law, etc. The parametric level is further characterized by the fact that every law describes certain specified class of phenomena and between individual laws there are no links. This level was attained for instance by the pre-Newtonian mechanics or electrodynamics before Maxwell. Besides the lawful approach of formulating laws in the mathematical language, there is also explanatory approach leading to creation (construction) of the new concepts, links, models, principles and laws in the form of partial hypothesis explaining the form and some existing laws. Besides the laws in the mathematical language, there are on the parametric level also verbally formulated laws – principles. The parametric level of ECKS also contains the space-time models of the studied universe, which form the framework for the physical parametric laws

The scientific concepts on the parametric level substantially differ from the concepts on the empirical level. The formulation of the laws in the mathematical language assumes the change of the concepts.

The process of idealization leads to creation of the **idealized concepts** (i.e. concepts referring to the idealized class of denotata) enabling the description of the phenomena by means of physical quantities. These concepts are, for instance, distance, speed, acceleration, time, mass, momentum, force, etc. Many mathematical concepts are also idealized concepts.

However, the process of idealization concerns also concepts, which do not describe physical quantities; in physics, it is for example the concept of a point mass, solid body, centre of gravity, etc; in mathematics, the geometric concepts "line segment", "point", "line", "triangle" etc.

The idealized concepts are abstract thinking constructions and their denotata are entities, unlike the concepts of the empirical level, which are mostly material, i.e. their denotata are objects, phenomena and plots in reality. Indefinitely defined concepts on the empirical level are on the symbolical level transformed into accurately defined concepts linked to other concepts by means of accurately formulated definitions.

The **symbolization** in the transition to the symbolical level means linking of the symbol to the core. It concerns the concepts, which are physical and mathematical quantities. Therefore, these concepts are at **symbolical level** of their development and we call them the **S-concepts – symbol concepts**. The idealized concepts on the symbolical level, which are not quantities and are usually denoted as idealized mathematical or physical objects, are called **improper S-concepts**, because these concepts (mainly in mathematics) often have in the core symbols (e.g. the denotation of lines, line segments, points angles, sets, etc. by letters).

Structural level of the conceptual knowledge systems

The structural level of the conceptual knowledge systems is characterized by the creation of complex structures of the scientific knowledge, which have the form of the closed scientific theories explaining all parametric laws and rules discovered in the preceding stage on the parametric level of cognition. For example, mechanics attained the structural level by the Newton's theory, electrodynamics by the Maxwell's theory. The structure of the theory as a part of the ECKS consists of the basic physical principles, laws of conservation and basic equations, which are integrated into the corresponding physical model of reality (e.g. Newton's model of absolute space, time and mass expressing invariant mechanic properties of the bodies and immediate distant forces, i.e. the propagation of the force action by an infinite speed; or Maxwell's model of ether). The structure of ECKS further consists of the deductive links to the derived physical laws and rules, and physical equations describing the course of the specific phenomena. On the structural level, there are no interpretations of a theory yet, only its applications. The transition from the parametric to the structural level may be characterized as the structuralization. It is connected with the explanatory approach, i.e. the explanation of the whole class of laws discovered on the previous level on the basis of some general principle, law or theory.

At the structural level of the ECKS, the **idealized concepts** from the parametric level are completed into the definitive form, which is characterized by the possibility of unlinking the meaning layers from the core. The concept structure is dominated by the sense links integrating the concept into the structural net of the scientific theory. The mind is able to work with the concept by means of the sense links within the structure ECKS even without using its meaning.

The **process of ideation** leads to the creation of the new concepts – **ideas** necessary as the building blocks of the new theory. An example of such a concept is the concept of energy in mechanics, "entropy" in thermodynamics, the concepts of operators in quantum mechanics, etc. Another part of the theory is formed by the mathematical concepts – **ideas**, which are incorporated in the basic laws (e.g. the concept of derivation, integral, rotation, divergence, etc.)

Formal level of concept

The formal level of the external conceptual knowledge system is attained after the long process of development of the corresponding physical theory. The foundation usually comprises the mathematical formalism of the theory, which is, however, related to the space-time models of the studied universe, and therefore it is illustrative. If the mathematical formalism of the corresponding physical theory is inappropriate, other mathematical formal theories are exploited. After the formal level is attained, the physical theory becomes independent of the opinion and the formalism enables to solve and study even such problems that are inaccessible to the opinion. The formal physical theory is superordinate to the physical theories with the subject content, which were formulated at the structural level, and to the theories, which developed it. It is a logically consistent axiomatic theory with the subject content irrelevant and unnecessary. Typical for the formal theory is the possibility of diverse interpretations into reality. The pure form of a theory at the formal level is represented by the mathematical formal theories, which are not related to the subject content and enable a whole scale of interpretations, which were demonstrated in the process of the physical cognition to be valid.

The scientific concepts of the formal theories at the **formal level** are through the **process of formalization** deprived of their subject content, i.e. their meaning loses the original meaning links to reality. What remains, are the sense links. Therefore, we call these concepts the **formal concepts**.

The **formal concepts** as the idealized concepts and ideas without fixed meaning links enable the creation of a number of **meaning interpretations**, i.e. more files of the meaning links, which do not form a permanent part of these terms, as for example in the case of the poly-semantic concepts with more meanings constituting the meaning field. Thus the formal physical or mathematical theory may describe several models of the physical reality or mathematical universe, which become the representations of the theory (Voight, 1981).

WISF-developmental levels of scientific concepts

The levels of the concept development described above concern the levels of concept development within the cognitive process of science and at the same time the possible developmental levels of the scientific concepts during the individual cognitive process of a learner in the course of education and instruction. According to the initials of the terms “Word concept”, “Image concept”, “Symbol concept” and “Formal concept” we call them the WISF-levels of the concept development and the process of their development the WISF-process.

1. **Primitive** (visual) level of concepts corresponds to the **primitive-empirical** level of the conceptual knowledge systems.
2. Concepts attain the **empirical/imaginative** level at the **empirical** level of the conceptual knowledge systems.
3. Concepts attain the **symbolical** level at the **parametric/symbolical** level of the conceptual knowledge systems and it is completed on the **structural** level.
4. Concepts might attain the **formal** level at the **structural** level of the conceptual knowledge systems, although usually it is on the **formal** level of the conceptual knowledge systems.

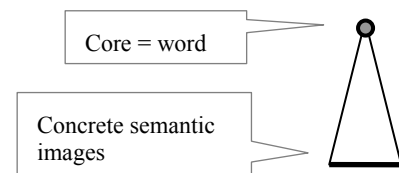
The diagram in the figure 3 shows the WISF-developmental levels of the mathematical and physical concepts (containing the description of the core and meaning only).

Figure 3: Physical/mathematical concept levels in the process of their formation

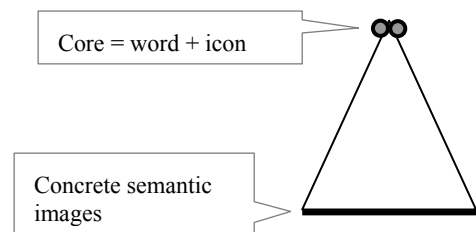
Levels of the physical/math concept

Concept “shape” – core and meaning

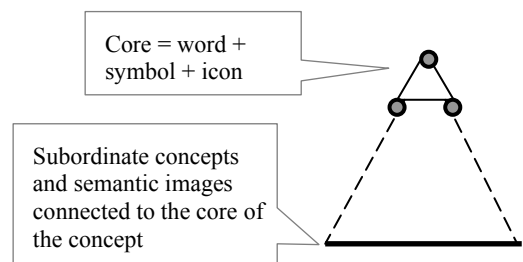
1. Primitive level
 The core of the concept consists of the word name only.
 The meaning – concrete semantic images and their links to the word



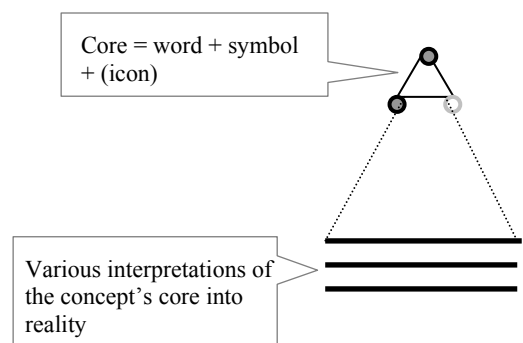
2. Imaginative level
 The core of the concept consists of the word and the representative semantic image/semantic icon.
 The meaning comprises a larger set of concrete semantic images and their links to the core.



3. Symbolical level
 The core of the concept is composed of a word, a symbol and a representative semantic image/icon.
 The meaning is composed of the subordinate concepts, (referents/designata) and the larger set of concrete concepts, semantic images and their links to the core.
 The core can be separated from the set of concrete semantic images and the mind can independently operate with it.



4. Formal level
 The core of the **formal concept** is composed of a word and a symbol (there might be an icon too, but it is not important).
 The core is fully separated from the meaning layers M1, M2, and M3, i.e. the usage of the formal concepts in thought operations needs no meaning substructure.
 The formal concept might have more meanings, which are various interpretations of this concept’s core into the reality. It can be a fictitious reality too.



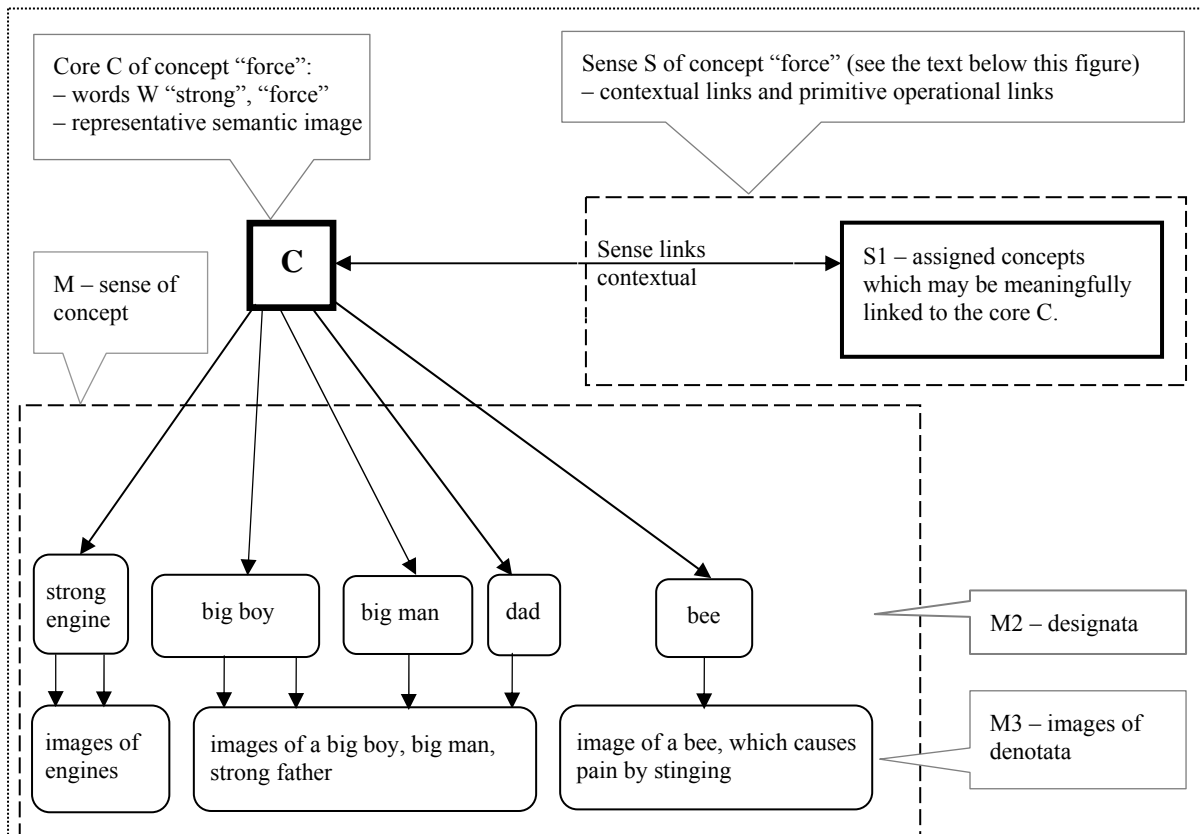
WISF-developmental levels of the concept “force”

1. Primitive level of the concept “force”

The **primitive level** of the concept “force” is created on the primitive empirical level of the conceptual knowledge system. The concepts on this level are based on the specific empirical experience of a child observing phenomena or experiencing situations, in which the corresponding objects and phenomena are named (by an adult, friend, older sibling ...). Children on this level usually could not answer directly the question “What is a force?” However, they knew the answer to the question: “Who is strong?” – “big boy”, “engine of a car”, “big man”, “father”, “horse”. They answered the question “Why is he strong?” in the following way: “The boy, because he beats me. He is stronger than me.”, “The father can lift me up.”, “The car is heavy and the motor can move it. I am not able to push it.” (Tarábek, 2007d)

Figure 4.1: Triangular model of the complex “force” at the primitive level

The rectangular boxes represent the components of the concept structure (C – core of concept, set S1); the dashed boxes represent the subsystems (meaning and sense), the oval boxes represent designata and the images of denotata, the arrows represent the links between the elements of the concept structure, the dotted box represents the whole concept “force”. The model shows the concept “force” on the level of lower complex.



The core C of the complex “force” consists of the word “force” or the word “strong” (or the pair “force – strong”) and the representative semantic image – the image of a strong man or machine, which manages to do things a weak man or child does not.

The sense S of the complex “force – strong” consists of:

- the contextual links to the concepts “heavy”, “pull”, “push”, “lift up”, “work”, “beat”, etc.,
- the primitive operational links to the concepts “weak”, “big”, because the children “define” e.g. “The man is strong, because he is big.”, “The father is strong, because he is not weak – he lifts up a heavy bag.”.

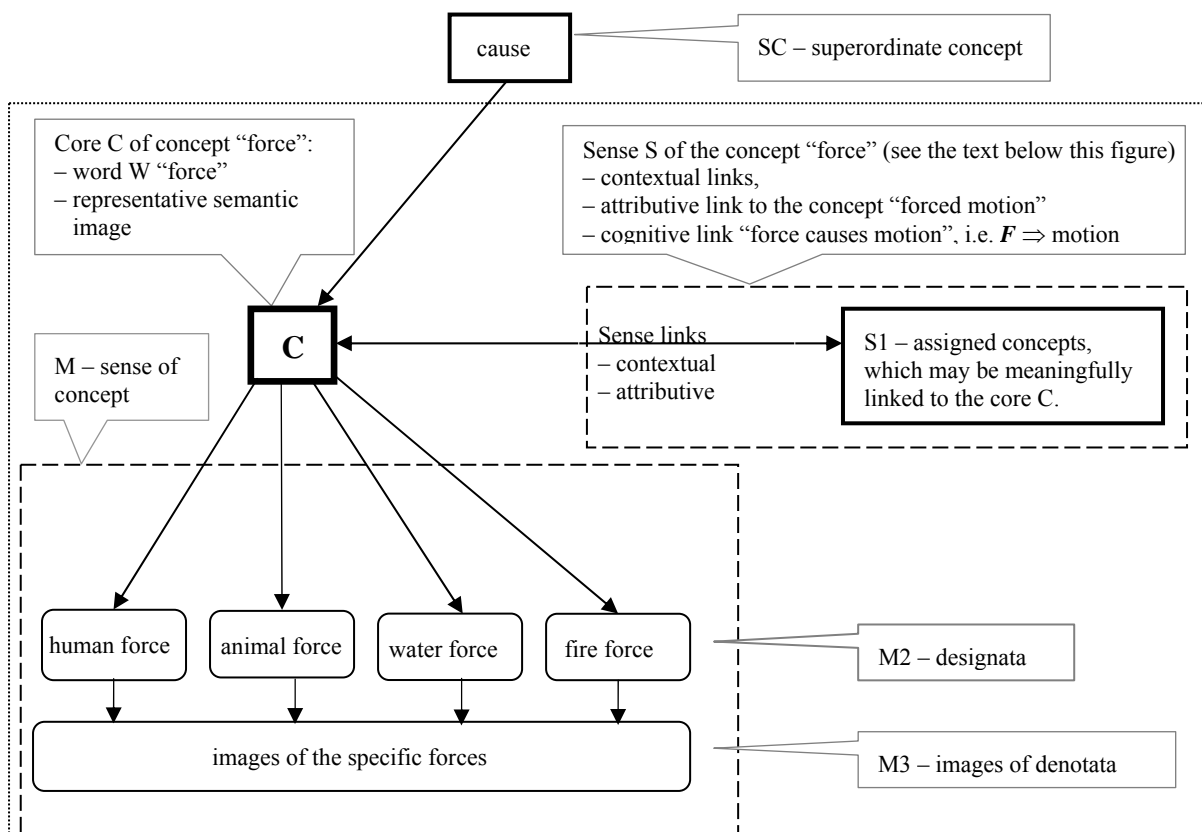
The meaning M of the complex “force – strong” involves objects, people and animals representing the expressions of force – the concept is understood as an attribute of the person, animal or machine, which can push, pull, lift up or move something the child cannot. This is evident from the answers like: “Horse is strong, because it pulls a carriage.”, “Engine of a car is strong, because it moves a heavy car.”, “My father is strong, because he beats the weaker boy for taking my ball.” The meaning also includes incorrect designata related to the fear and pain: the children answered for instance: “The neighbor’s dog is strong, because it bites and I am afraid of it.”, “The cat is weak, I am not afraid of it.”, “The bee is strong. When it stings me, I feel pain.” (Tarábek, 2007d)

2. Imaginative/empirical level of the concept “force”

The **imaginative/empirical level** of the concept “force” is formed at the empirical level of the conceptual knowledge system. In the course of the school instruction, the concept of force is formed in the grades 6, 7, 8 – usually as a complex or pseudoconcept. We will show the fully developed concept of force on the empirical level as it was understood by Aristotle – the so-called Aristotelian level of the concept “force”. Aristotle, in agreement with the general principle of causality “every motion is caused by the mover – kinoyon” understood force as the cause of the forced motion. He distinguished natural motions – e.g. falling of heavy bodies and rising of light bodies (smoke) – from forced motions – caused by a human, animal, water pressure, etc. The Aristotle’s concept “force” is fully developed (it is neither a pseudoconcept nor a complex) and his law of force is a generalization of the empirical experience that bodies moved only when there was a force acting upon them. When the force stopped, the bodies gradually stopped, as well. This concept of force is incorrect from the point of view of the Newtonian mechanics (it is a frequent misconception of pupils), and to differentiate it from the correct Newtonian level, we also call the empirical level of the Aristotelian concept “force” the Aristotelian level (Tarábek, 1988).

Figure 4.2: Triangular model of the Aristotelian concept “force” at the empirical level

The model shows the fully developed Aristotelian concept “force”. The rectangular boxes represent the components of the concept structure (C – core of the concept, set S1); the dotted boxes represent the subsystems (meaning and sensel), the oval boxes represent the designata and images of the denotata, the arrows represent the links between the elements of the concept structure, and the dotted box represents the whole concept “force”.



The core C of the Aristotelian concept “force” consists of the word “force” and the representative semantic image – the image of the force as the cause of the violent motion caused by a human, animal, flow of water, etc.

The sense S of the concept “force – strong” consists of:

- the contextual links to the concepts “to move”, “to pull”, “to push”, “to lift up”, etc.,
- the attributive and operational link to the concept “violent motion”. In the Aristotelian definition “The force is the cause of the (violent) motion”, “cause” is a superordinate concept and “(violent) motion” an attribute of the force,
- the cognitive link “force causes motion”, i.e. $F \Rightarrow \text{motion}$.

The meaning M of the Aristotelian concept „force“ consists of the designata “human force”, “animal force”, etc., and the denotata – the specific manifestations of the force. The class of referential concepts is empty due to the insufficient knowledge about force.

3.1 Symbolical level of the concept “force” at the parametric level of CKS

The symbolical level of the concept “force” is formed on the parametric level of the conceptual knowledge system, and in the history of physics, during the period immediately preceding Newton and during the Newton’s discoveries of the laws of the classical mechanics. The concept of force and the assigned concepts “friction”, “resistance of the environment”, “displacement”, “velocity”, “acceleration” and “matter” had to pass through the process of idealization to become physical quantities. The trajectory of the body had to be described by a curve, i.e. one-dimensional mathematical object. The change of motion was indicated by the change of the velocity of the body, i.e. acceleration, deceleration or curving of the trajectory. The velocity and acceleration were described by mathematical definitions. The matter of the body was determined by its mass as a physical quantity. In addition, the observed phenomena – decelerated, steady and accelerated motion – had to be analyzed with regard to the acted forces. It had to be discovered that the deceleration of the motion, after the force keeping the body in motion stops acting, is caused by friction or resistance of the environment. Therefore, the forces started to be differentiated into the forces causing the change of motion, and the forces obstructing the motion (friction, resistance of the environment).

The analysis of the motions of bodies on an inclined plane and free falling bodies led Galileo to the formulation of the law of free fall, but also to the classification of motions into inertial motions – the motion of a ball on a horizontal plane without friction (and also the motion of the celestial bodies), acceleration – the motion of a ball on an inclined plane and deceleration – the motion of a ball on an inclined plane upwards. Subsequently, René Descartes defined the inertial motion as a rectilinear steady motion, which is possible only when the resistance of the environment and friction are zero. At the same time, he realized the time effect of force (i.e. the impulse $F \cdot t$) is proportional to the product of the mass and velocity (i.e. the momentum $m \cdot v$). Thus, he disproved the Aristotle’s empirical generalization that the velocity of motion is proportional to the acting force. Afterwards, Newton extended Galileo’s notion of inertia to the all kinds of motions without acting force and formulated the law of inertia. The resistance of a body to the change of motion – its inertia – might be understood in the Newtonian conception as a fictitious inertial force, which prevents the acting force to change its motion. In some case, the inertial force appears to be real, for instance when a bus accelerates or decelerates (we feel the force moves us backwards or forwards). Similarly, the inertial force appears to be real in rotating systems – merry-go-round, centrifuge, etc. Newton then correctly understood force to be the cause of the change of motion (i.e. the case of the cause of acceleration, deceleration or curving of the trajectory), and not the cause of the motion itself as it was in the case of Aristotle. The question was what was the mathematical dependence of the change of motion (i.e. acceleration) on the magnitude and direction of the acting force. For the formulation of a hypothesis, it was necessary to analyze motions exposed to various forces (e.g. forces causing the motion of a body and forces obstructing this motion), and therefore Newton had to formulate and understand the law composition of forces. Newton then correctly assumed that the change of velocity, i.e. acceleration, is directly proportional to the magnitude of the acting force ($a \sim F$), and has the same direction. Newton understood mass as the “magnitude of the matter of a body” – quantity expressing invariant mechanic properties of the body, e.g. its resistance to the change of motion through an acting force. Newton had to find out, what is the mathematical dependency of the change of motion (indicated by the change of velocity) on the mass of the body. He assumed that it is an indirect proportion, i.e. the change of velocity $a \sim 1/m$, which was confirmed by the observations and experiments. The two hypothesis combined together led to the formulation of the second Newton’s law $F = m \cdot a$.³

The concept of force in the Newtonian mechanics is fundamentally different from the concept in the Aristotelian mechanics. We call it the Newtonian level of the concept of force. To understand it, students:

1. have to transform all the other concepts related to force through the process of idealization (see fig. 4.3),
2. have to understand to law of conservation and the essence of the inertial force,
3. have to distinguish between the forces causing the motion of a body and the braking forces,
4. have to be able to analyze the motion of a body exposed to these two types of forces,
5. have to know and understand the law of composition of forces,
6. should formulate the hypothesis concerning the direct proportion $a \sim F$ and indirect proportion $a \sim 1/m$,
7. should understand that the change of motion has the same direction as the acting force,
8. should formulate the II. Newton’s law on the basis of the preceding knowledge,
9. should understand the need to verify the hypothesis; it may be demonstrated, how the hypothesis $F = m \cdot a$ was tested by the explanation of the motion of celestial bodies assuming the Newton’s law of gravitation and the law of action and reaction.

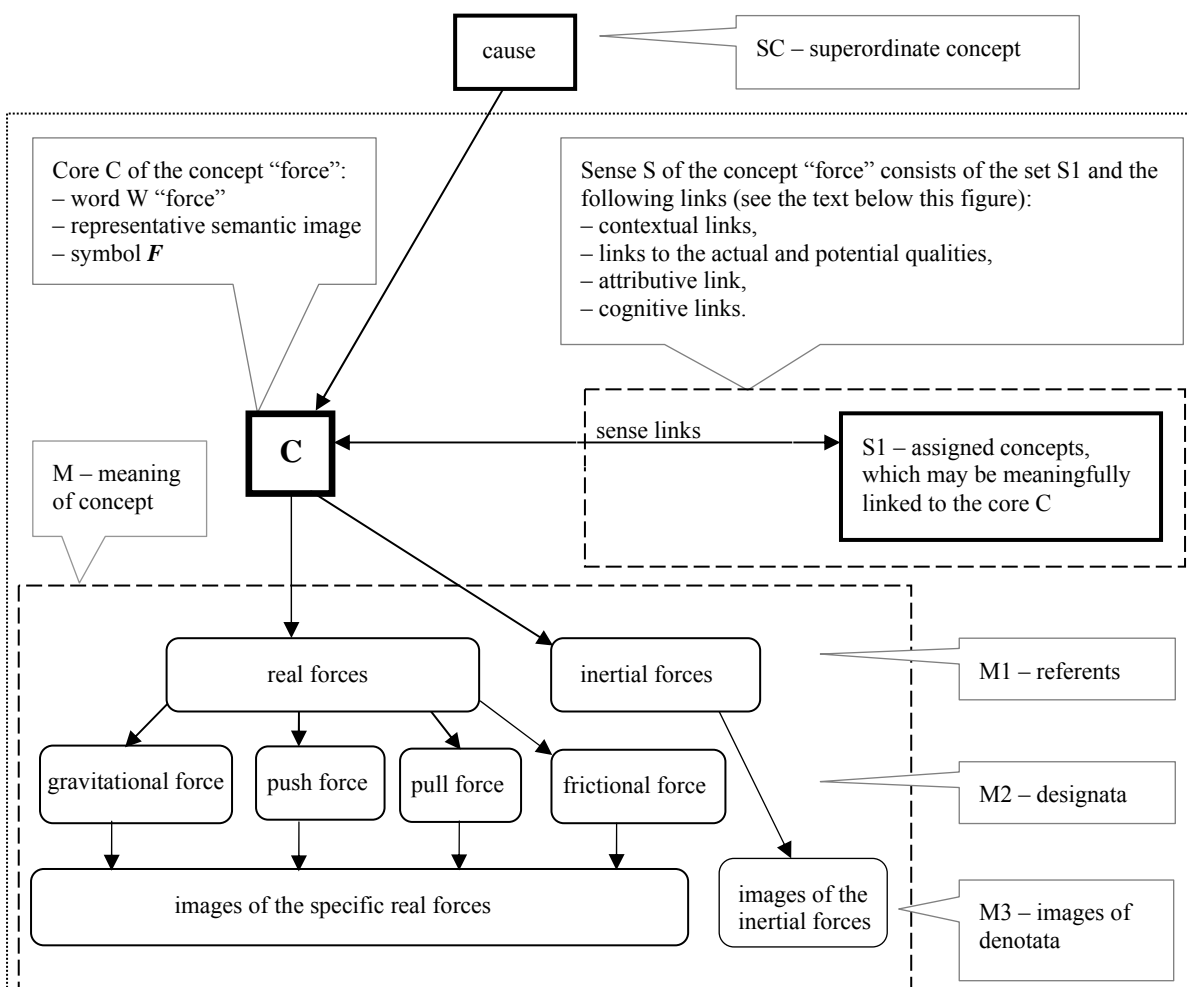
This procedure prevents the prevailing Aristotelian misconception in the thinking of students, and creates the correct Newtonian level of the concept of force, as well as a sufficient understanding to the laws of the Newtonian mechanics. Since it is quite demanding, it is not suitable in the full range before 10th grade of

education. The steps 2 – 6 may be completed sooner (e.g. in 7th grade) in the form of qualitative reflections and related qualitative knowledge.

*3 The described procedure models the creation of the second Newton’s law on the basis of a historical analysis.

Figure 4.3: Triangular model of the Newtonian concept “force” at the symbolical level

The model shows the fully developed Newtonian concept “force”. The rectangular boxes represent the components of the concept structure (C – core of concept, set S1); the dotted boxes represent the subsystems (meaning and sense), the oval boxes represent the designata and images of the denotata, the arrows represent the links between the elements of the concept structure, and the dotted box represents the whole concept “force”.



The core C of the Newtonian concept “force” consists of the word “force”, symbol F and the representative semantic image – the image of the forces causing acceleration, deceleration or curving of the trajectory.

The sense S of the concept “force” consists of:

- the contextual links to the concepts “motion”, “change”, “to act”, “acting”, “body”, , etc.,
- the qualitative links to the actual qualities “magnitude (of force)”, “direction (of force)”, “point of application”, which are related to the fact that the force is a physical quantity acting on a specific physical object,
- the potential qualities “real, i.e. gravitational, push, friction, resistance” and “inertial”, which divide the force into the class of referents M1,
- the attributive link to the concept “change of the motion”. In the Newtonian conception, which may be considered to be the definition of force: “Force is the cause of the change of the body’s motion.”, “cause” is a superordinate concept and “change of the motion” an attribute of force.
- the cognitive links to “acceleration or deceleration of a body is proportional to the acting force ($a \sim F$) and it has the same direction”, “acceleration or deceleration of a body is indirectly proportional to the body’s mass” ($a \sim 1/m$), given by the II. Newton’s law $F = m \cdot a$, as well as the opposite link “force causes the change of the motion, i.e. $F \Rightarrow a$, where a is the vector of acceleration, which may cause acceleration, deceleration or curving of the body’s trajectory”.

The meaning M of the Newtonian concept “force” consists of the layer M1 – referential concepts “real forces” and “inertial forces”, layer M2 – designata “gravitational force”, “push force”, “pull force”, “friction force”, “resistance of the environment” or “deformation force”, and denotata – specific forces.

3.2 Symbolical level of the concept “force” at the structural level of ECKS

The **symbolical level** of the concept “force” at the structural level of the conceptual knowledge system represented by the mechanics, electromagnetism, nuclear physics and physics of the elementary particles differs from the previous model in the fig. 4.3 primarily by the extended meaning with the **meaning field**, which has more classes of referential concepts. The extended meaning is also associated with the extended set of links to the corresponding potential qualities.

The main class of the referential concepts comprises the basic physical interactions – forces, namely the gravitational, electromagnetic, weak interaction and nuclear forces (strong interaction).

In the classical mechanics and electromagnetism, we distinguish the following classes of referential concepts:
 real forces: distant forces– gravitational, electric, magnetic,
 contact forces – push, pull, friction, resistance of environment; and
 fictitious forces: inertial, centrifugal and Coriolis force.

The theoretic mechanics distinguishes e.g. external forces acting on a system of bodies and the internal forces acting between the bodies of the system.

Another difference is the transformation of the concept “force” into the **primary concept** without the superordinate concept, which is in agreement with the conception of the modern physics, in which force is defined by a physical formula (see paragraph 4 Formal level of the concept “force”). In the conception of the modern physics from the end of the 20th century, the concept of distant forces is substituted by the concept **basic physical interaction**.

The model in the fig. 4.3 mentions only the **kinetic effects of force**. The attributes of force also involve the **distortional effects of force**, which are related to the cognitive links to the magnitude of the deformation and the Hook’s law).

In addition, the attributes of force include the kinetic effects connected with the rotational motion related to the operational definition of the moment of force, the effects of force in liquids and gases related to the operational definition of pressure. Correspondingly, the class of the referential concepts is extended to contain the buoyancy forces acting when bodies float and the resistance forces acting when liquid flows around bodies.

4. Formal level of the concept “force”

The **formal level** of the concept “force” is attained on the formal level of the conceptual knowledge system represented by the theoretic mechanics.

We shall demonstrate the inclusion of force into the sum of knowledge and concepts on an example of a gravitational field around a big body – e.g. the Earth, and a small free falling body (directly to the centre of the big body) with the mass m , e.g. a meteoroid, which did not reach the atmosphere yet, so that its motion is not braked. We shall exploit only the knowledge of the secondary school physics.

The kinetic energy of the falling body $E = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ is increasing ($v = g \cdot t$ is the instantaneous speed of the fall, g is the gravitational acceleration, t is the time).

After the substitution for v , we have the energy $E = \frac{1}{2} m \cdot g^2 \cdot t^2 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \cdot mg = x \cdot mg$, where $x = \frac{1}{2} g t^2$ is the distance of the free fall.

The derivation of the kinetic energy with respect to the distance x is $dE/dx = m \cdot g$. According to the second Newtonian law, the force acting on the body with acceleration g is $F = m \cdot g$. Thus we have $dE/dx = F$.

According to the law of energy conservation, the sum of the kinetic energy E and potential energy W of the body has to be constant, and so the potential energy W of the meteoroid decreases equally as its kinetic energy increases. The force F acting on the body in the gravitational field is equal to the differential change of the potential energy of the body (i.e. the product of the gravitational potential and the mass of the body) $F = - dW/dx$. Because the derivation dW/dx is negative and the force F is positive, the sign in the formula has to be minus.

Force in the theoretic mechanics is defined analogically. The force in an electric or magnetic field is defined by a physical formula, too.

Force in the formal conceptual knowledge system is a formal concept defined in terms of other concepts by means of an operational definition. It is linked to other concepts, e.g. intensity, potential, mass, acceleration, etc. through the sense links by means of physical formula; within the conceptual knowledge system it is used without any specific meaning interpretation. The meaning interpretation of force differs from case to case.

5. Cognitive analysis and triangular modeling of the concept structure in the curricular process

The triangular modeling may be used as one of the transformation methods, particularly in connection with the transformation T2 in the course of the didactic communication related to the creation of the educative model – it corresponds to the curriculum transformation CT2 = conceptual curriculum → intended curriculum (Záškodný, 2007, Tarábek 2007c).

The triangular modeling may be used for the cognitive analysis of the internal concepts of the learners during the transformation T4 in the course of the instruction, and for finding out the quality of the outputs of the educational process – the implemented curriculum, particularly for:

1. finding out the structure and level of the input concepts and preconceptions of the learners,
2. finding out the structure and level of the output concepts of the learners after finishing the given stage of the instruction process. The model is very efficient for detecting the causes of formation of misconceptions, i.e. erroneously formed concepts and knowledge in the course of the school instruction (Adamčíková, Tarábek 2007).

The procedure of cognitive analysis within the curricular process is the following:

1. The first step is the cognitive analysis of the external concepts, which should form a part of the curriculum. We analyze the elements of the concept structure according to the triangular model. By means of the cognitive synthesis, we create triangular models, which may differ in dependence on the Vygotian stage of the concept formation, WISF-level of the concept development, or stage of the didactic communication of the concept. During the analysis, we search for the elements of the triangular model, and during the synthesis, we compose them to form the model. In this step, due to the lack or even redundancy of information selected from the external CKS, we have to make use of the information about the internal CKS from the cognitive research, too.
2. After finding out the structure of the selected concept, its possible developmental levels and possible forms for the various stages of the didactic communication, during the process of the cognitive synthesis, there are created – according to the triangular model – the specific models of the concept structure appropriate to the cognitive level of the learner. The created models are verified and arranged according to the experimental data from the cognitive tests, from the conversations with the respondents, or from the visual and graphical creations of the learners.
3. In the process of the didactic synthesis, the structural conceptual units (knowledge objects) are constructed as the elements of the didactic conceptual knowledge system – the intended curriculum. The verified models of concepts are integrated into them.
4. The structural knowledge units are the basis for the creation of the structural units of the curriculum (learning objects) during the transformation T3 – the curriculum transformation CT3 = intended curriculum → project curriculum *4.

*4 The **structural knowledge units** are the conceptual knowledge micro-systems including the relatively independent compact subsystem of the concepts and knowledge, which is the element of the whole CKS. After its transformation into the structural unit of the curriculum (learning object) as a part of the curriculum or the text in a textbook, this relatively independent part with a title forms e.g. a chapter in the textbook (Tarábek, 2007c). In the matrix method of the modeling of the curriculum structure, the structural unit forms an independent micro-matrix (Záškodný, 2007).

Cognitive analysis and the modeling of the concept “force”

This concept and the related knowledge are instructed from the 6th grade till the 12th grade.

The cognitive analysis and the triangular modeling of the concept “force” is described in the chapter 4 in the part WISF–developmental levels of the concept „force“. The analysis of the developmental levels found out two different levels of the development of the concept “force”, which were also found out during the testing of the knowledge of the pupils of the primary and secondary schools:

- The Aristotelian (ancient) level of the concept “force” – described in the fig. 4.2; this level as the mental representation of the concept “force” and the related knowledge in the minds of the learners is a misconception;
- The Newtonian level of the concept “force” – described on the pages 129 and 130 and in the figure 4.3.

At the high schools, the symbolical level of the concept “force” is instructed at the structural level of the conceptual knowledge system represented by the mechanics, electromagnetism, nuclear physics and physics of

the elementary particles, which differs from the Newtonian level by the extent and absence of the superordinate concept – the details are presented on the page 131.

The papers by Tarábek (1988, 2005), Tarábková (1986) and Butková (1988) present the outcomes of the tests focused on finding out the Aristotelian and Newtonian levels. As an example, we present the outcomes of the two tasks, which represent best the development of the concept „force“ during the instruction process at the primary and secondary schools.

On the question “How does force acting on body manifest itself?”, the cognitive link between the force and the motion of the body was tested.

On the Newtonian level, this link has the form $F \Rightarrow a$, i.e. “force causes the change of motion of the body (acceleration, deceleration or curving of its trajectory)”. On the Aristotelian level, this link has the form $F \Rightarrow \text{motion}$, i.e. “force causes the motion of the body”.

The column 6 – The answers were classified as belonging to the Newtonian level if they contained at least one of the changes of the motion: acceleration, deceleration, curving of the trajectory (the last indication was very rare).

The column 5 – The answers were classified as belonging to the Aristotelian level if they involved the expression $F \Rightarrow \text{motion}$, there were some expressions of the kind “acting force manifests by causing a motion” and “The bodies start moving.”. Since the pupils in the 7th grade learn that “force has shifting effects – it can accelerate, decelerate or stop the motion of a body”, and the students of the 9th grade learn that “the result of a mutual force action may be the deformation of the corresponding bodies or the change of their motion”, these answers were evaluated as Aristotelian.

The column 4 – The answers of the sort “force action manifests by the deformation of the bodies” were evaluated independently.

The column 3 – The answers, which might be correct statements, but did not answer to the question correctly, were evaluated as incorrect or inappropriate, e.g. “force is acting by certain pressure”, “force manifests by an increase in energy”, “bodies are attracted and repulsed”.

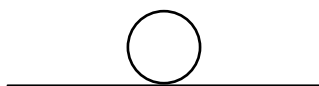
The column 2 – zero answers – respondents did not answer at all.

The column 1 presents the total number of respondents in the given age bracket.

The numerical data in all columns present the percentage of the answers from the total number of respondents in the column 1, which belong to the corresponding category and age bracket. The column 1 presents the number of respondents in the specific age bracket. The column 2 presents the percentage of the zero answers (no answer), and the column 3 presents the percentage of the incorrect and incomprehensible answers, which could not be evaluated with regard to the inclusion into the columns 4, 5 and 6.

number of column	1	2	3	4	5	6
number of respondents – N age of respondents	N	zero answer	incorrect answer	answer “deformation”	answer on the Aristotelian level	answer on the Newtonian level
grade 6	370	16,0 %	35,1 %	4,3 %	44,1 %	0,5 %
grade 7	307	13,7 %	12,4%	15,3%	54,4%	4,2 %
grade 8	264	10,6 %	8,7%	26,3%	51,0%	3,4 %
grade 9	209	7,6 %	2,5 %	2,9%	54,5 %	32,5 %
grade 10	221	4,4%	2,7 %	4,4%	63,4 %	25,3 %
grade 11	115	2,6 %	0,9 %	2,6%	65,2 %	28,7 %
grade 12	187	2,7 %	2,1 %	4,3%	63,6 %	27,3 %

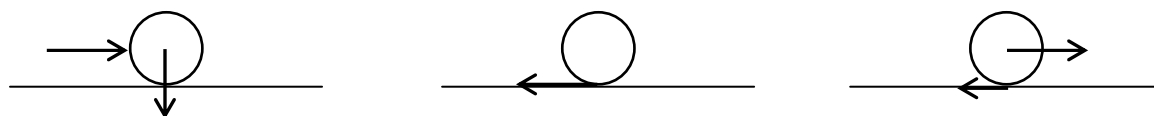
The task “Sketch in all forces acting on the ball in the figure!” tested the cognitive link between the motion of the body and the force. The text to the figure: A ball rolling steadily to the right on a frictionless horizontal plane.



The column 6 – On the Newtonian level, the students drew either just the force of gravity F_g directed downwards, or the force F directed to the right and the frictional force F_t of the same magnitude to the left, or both possibilities. The forces were often denoted by symbols.



The column 5 – On the Aristotelian level, the students drew only the force in the direction of the motion, only the frictional force, or both forces having unequal magnitude. Whether they also drew the force of gravity or not did not influence inclusion into this category of solutions.



The column 3 – The students only wrote the name of a force, e.g. “inertial force”, “frictional force”.

The column 2 – The students did not solve the task – they did not draw any forces and write any names.

The numerical data in all columns shows the percentage of the answers from the number of respondents presented in the column 1 and included in the corresponding category and age bracket. The column 1 presents the number of respondents in the specific age bracket. The column 2 presents the percentage of the zero answers (no answer), and the column 3 the percentage of incorrect or incomprehensible answers, which could not be evaluated with regard to the inclusion into the columns 4, 5 and 6.

number of column	1	2	3	4	5	6
number of respondents – N age of respondents	N	zero answer	verbal answer		answer on the Aristotelian level	answer on the Newtonian level
grade 6	370	33,2 %	18,1 %		46,5 %	2,2 %
grade 7	307	20,8 %	24,8%		41,0%	13,4 %
grade 8	264	21,6 %	9,1%		61,7%	7,6 %
grade 9	209	3,3 %	2,9 %		72,2 %	21,6 %
grade 10	221	0,0%	2,7 %		67,8 %	29,5 %
grade 11	115	2,6 %	1,8 %		67,8 %	27,8 %
grade 12	187	2,1 %	0,6 %		86,1 %	11,2 %

Development of the concept “force” – transition from the imaginative-empirical (Aristotelian) level to the symbolical (Newtonian) level

The developmental trends of the concept “force” and related knowledge may be characterized, besides the gradual increase of the whole volume of the knowledge, by the fact that the knowledge corresponding to the Aristotelian (ancient) level of thinking, which may be denoted as Aristotelian misconceptions, contrary to the expectation, do not decrease, but increase in volume, and considerably predominate the correct knowledge of the Newtonian level. Similar trends of development were found out in the solutions of other tasks (Tarábek, 1988) and in other papers (Hejnová, 1984, Nachtigall, 1981), while misconceptions of this kind were found out in the thinking of 49% students of teaching on the MFF UK (currently FMFI UK) (Tarábek, 1988). Similar results concerning misconceptions of the students of physics in the beginning of their university studies were found out in other papers, as well (details in the paper by Adamčíková and Tarábek, 2007). Newer research of misconceptions (Hestenes at all, 1992, Sharma, 2007) confirms that the situation has not changed since then much.

The Aristotelian level of thinking in mechanics is natural, because it is based upon the common experience of a cognitive agent, who generalizes the observed phenomena and creates the first primitive empirical laws.

The transition to the Newtonian level, which is at the same time the transition from the empirical to parametric or even structural level of the conceptual knowledge system of a student, assumes a qualitative change in thinking, and a complex reconstruction of the original concepts and knowledge.

The creation of a valid CKS on the parametric level in the thinking of the students, which is in physics represented by a Newtonian conception, assumes several steps. Students:

1. have to pass through the process of concept idealization in the concept field,
2. have to understand the law of inertia and the essence of the inertial force as a fictitious force in the non-inertial systems,
3. have to distinguish the forces causing the motion of a body from the brake forces,
4. have to know how to analyze the motion of a body due to these forces,
5. in connection with the previous step, have to know and understand the law of composition of forces,
6. should formulate the hypothesis about the direct proportion $a \sim F$, and indirect proportion $a \sim 1/m$,
7. should understand that the change of the motion has the same direction as the acting force,
8. should compose the second Newton's law on the basis of the previous knowledge.
9. To make them understand that any hypothesis needs to be verified, it might be demonstrated how the hypothesis $F = m \cdot a$ was tested by means of studying and explaining the motions of the celestial bodies, which assumes the knowledge of the Newton's law of gravitation, and the law of action and reaction.

Because this procedure is rather demanding, in the full range, it is suitable for the 10th grade of the school education. The steps 2 – 6 may be completed sooner (e.g. in the 7th grade), in the form of qualitative reflections and the related qualitative knowledge

Developmental misconceptions

We can say that the concept development pass through several developmental levels in the course of the school education. Therefore, the primitive and empirical level of concept's development is no shortcoming in the concept thinking if they represent only transitional levels. However, if they represent the final state of the concept development, then they constitute the concept misconceptions. The final state of primitive or empirical level of concept in the mind of students can be called as **developmental misconception**.

Development of the physical concepts according to the Vygotian phases

The papers by Tarábek (1988, 2005) analyzed tests which studied the formation of some concepts according to the Vygotian phases – complex, pseudoconcept, and concept – in the course of the secondary and high school education (Tarábeková, 1986, Butková 1988, and Mlčúchová 1988). Because the phases of the higher and lower complex and pseudoconcept were not defined yet, the studies distinguished only the phases of the complex, pseudoconcept and concept. The individual tasks tested only some of the elements of the concept structure: e.g. the meaning (See Table 1 in the chapter 3, page 114), the attributes and the link to the superordinate concept (See Tables 4, 6, 7, pages 136, 138, 139), and the representative semantic image (See Table 5 at page 137). Other concepts were studied as well (voltage, inertia, frictional force).

It was demonstrated that although the portion of the zero and entirely incorrect answers with the age decreases, the portion of the complex phase of the concept does not change much in the course of the secondary and high school (sometimes it increases, sometime decreases, sometime the change is not distinctive). The portion of the pseudoconcept phase has an increasing tendency, however, not in all cases. The percentage of the fully developed concepts was striking. Independently of the concept studied, the phase of the fully developed concept was attained in the 12th grade only by approximately few percents of students (with the exception of the concept „conductor of the electric current“, where it was 12%). It means that although the education has a positive effect on the concept formation, the physical concepts of majority of the graduates is developed at the level of complex or pseudoconcept, i.e. an incomplete phase of concept.

Vygotian misconceptions

We can say that the concept formation inevitably follows the Vygotian phases. Therefore, the complex concepts and pseudoconcepts are not shortcomings in the concept thinking if they represent only transitional phases. However, if they represent the final state in the concept development, then they constitute the **concept misconceptions**. The final state of complex or pseudoconcept phase in the mind of students can be called as **Vygotian misconception**.

The solution of the problem of misconceptions requires a cognitive analysis of the key concepts of the curriculum, which are usually on a higher level of abstraction, and are more demanding. Subsequent procedures of the problem solution were not realized so far, and will be the subject of further studies.

Analysis of the test's questions

The question “What is the electric current?” was focused on the attributive links and the link to the superordinate concept. The concept “electric current” has the superordinate concept “motion” and the following attributes:

1. It has to be the motion of the free electrically charged particles (this is coded in the word “electric”).
2. It has to be a directed motion (this is expressed by the word “current”).

The correct definition should be: “The electric current is a directed motion of free electrically charged particles.” This answer or its variants expressed in a more specific form are contained in the last column 5 in the table 4.

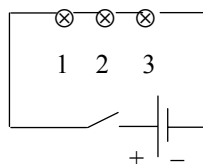
The answers at the level of the pseudoconcept (the column 4) had the link to the superordinate concept, but one of the attributes was absent. For instance: “The electric current is a motion of free electrons or ions.” – This answer also shows the knowledge of two referents: the current consisting of electrons and the current consisting of ions. Other answers: “The electric current is a directed motion of free particles.”, “The electric current is a directed motion of electrons.”

The answers at the level of complex (the column 3) were incomplete in the sense that there was no the link to the superordinate concept and the absence of the attributes was also obvious. Typical answers: “The electric current is used as a drive of engines, ships, etc.”, “The electric current flows through a conductor between the poles of the source.”, “The electric current lights up bulb, moves a machine, ...”, “The electric current is a physical quantity.”, “ $I=U/R$ ”, “ $I=Q/t$ ”. The last two types of the answers were rare, however, they were classified as complexes (although the formulas are correct), because the links to the superordinate concept and the attributes were not clear in them.

The numerical data in all columns show the percentage of the answers (from the given number of respondents presented in the column 1) classified as belonging to the corresponding category and age bracket. The column 1 presents the number of respondents in a given age bracket. The column 2 presents the percentage of the zero answers (no answers) and the incorrect or incomprehensible answers, which could not be evaluated as far as the inclusion into the columns 3, 4 and 5 was concerned.

column	1	2	3	4	5
age of respondents	number of respondents	zero/incorrect answer	answer at level of complex	answer at level of pseudoconcept	answer at level of concept
grade 8	315	47,3 %	16,9 %	27,9 %	7,9 %
grade 9	200	38,5 %	9,0 %	50,5 %	2,0 %
grade 11	218	5,5 %	9,3 %	73,9 %	11,3 %
grade 12	200	7,5 %	4,5 %	80,0 %	8,0 %

The task “Which bulb will light up the first after switching on? Give reasons for your answer!” tested the representative semantic image of the concept „electric current“. Three numbered bulbs were connected in a series in a closed circuit with a unidirectional source.



The complete representative semantic image should comprise the correct image of the motion of electrically charged particles in a conductor, which due to the electric field (propagating at speed of light) begin to move at the same time (at least in the common electric circuits, where the delay is negligible as the students learn).

The answers at the level of concept (the column 5) expressed the image of a correct representative semantic image together with the correct explanation.

The answers at the level of pseudoconcept (the column 4) expressed the correct representative semantic image, but the explanation was insufficient, incorrect or referred to a specific experience. For example: “The bulbs are light up at the same time, because the current in the circuit is constant.”, “When I switch on a chandelier with several bulbs, they are also light up at the same time.”, “At the same time, because the current in the circuit starts at a time and stops at a time.”, “Because the current propagates at the speed of light and we would not notice the difference in lighting up.” (Not the current, but the electric field propagates at the speed of light.)

The answers at level of the complex (the column 3) were incorrect, because though they expressed the image of a “slow” motion of the electric current (which is correct), they did not consider the speed of light, by which the electric field in the conductor propagates. Examples of the answers: “The bulb 1 lights up as the first, because the electric current flows through it as the first.”, “The bulb 1 lights up as the first, because the current flows from + to –.”, “The bulb 3 lights up as the first, because the current flows sooner through it.”, “The bulb 3 lights up as the first, because the current is the motion of negative particles, which move from + to –.”

The numerical data in all columns present the percentage of the answers (of the given number of respondents in the column 1) included in the corresponding category and age bracket. The column 1 presents the number of respondents in the specific age bracket. The column 2 present the percentage of the zero answers (the pupils did not answer) and the incorrect or incomprehensible answers, which could not be evaluated as far as the inclusion into the columns 3, 4 and 5 was concerned.

column	1	2	3	4	5
age of respondents	num. of respondents	zero/incorrect answer	answer at level of complex	answer at level of pseudoconcept	answer at level of concept
grade 8	315	3,2 %	45,7 %	45,1 %	6,0 %
grade 9	200	5,5 %	60,5 %	27,0 %	7,0 %
grade 11	218	4,1 %	58,7 %	25,7 %	11,5 %
grade 12	200	2,0 %	63,0 %	29,5 %	5,5 %

The task “Explain from the physical point view, why it is more secure to jump from a great height into water than on a concrete floor!” tested the attribute of force, which is the fact that it expresses the mutual interaction between physical objects.

The correct answers at the level of concept (the column 5) explained the situation by means of the brake forces arising after the fall into the water (the forces are smaller), and on the concrete (the forces are much greater).

The answers at the level of pseudoconcept (the column 4) explained the situation by the different magnitude of the slowing down in the water and on the concrete, which implied forces of different magnitudes. The attribute was presented indirectly – and so its link to the core of the concept “force” was insufficient.

The answers at the level of complex (the column 3) explained the situation by the smaller resistance of the water, hardness of the concrete, a greater resistance of the water in comparison with the air – i.e. without any link to the attribute of force. We can infer that the pupils and students had developed no attribute of force in their concept structure.

The numerical data in all columns show the percentage of the answers (from the given number of respondents presented in the column 1 classified as belonging to the corresponding category and age bracket. The column 1 presents the number of respondents in a given age bracket. The column 2 presents the percentage of the zero answers (no answers) and the incorrect or incomprehensible answers, which could not be evaluated as far as the inclusion into the columns 3, 4 and 5 was concerned.

Table 6: The solution of the task “Explain from the physical point of view, why it is more secure to jump from a great height into a water than on a concrete floor!”					
column	1	2	3	4	5
age of respondents	number of respondents	zero/incorrect answer	answer at level of complex	answer at level of pseudoconcept	answer at level of concept
grade 8	315	43,2 %	44,9 %	11,8 %	0,5 %
grade 9	209	41,5 %	44,8 %	8,2 %	0,5 %
grade 11	115	49,3 %	33,9 %	11,3 %	1,0 %
grade 12	187	48,2 %	37,9 %	11,8 %	2,1 %

The question “What is a force?” tested the attribute of force – the interaction between physical objects and the link to superordinate concept. Students do not learn to explain force as a cause of the change of the motion, so their definition cannot contain the superordinate concept “cause”. This is in agreement with conception of the modern physics, in which force is a primary concept, i.e. it has no superordinate concept, and it is defined either by means of a formula (See The formal level of the concept “force” in chapter 4, page 131), or by a concept subordinate to the concept of interaction. The students cannot know this definition. However, the students feel the link of force to the concept “the cause of a change of motion of bodies or the cause of a deformation” and describe it by specific expressions, e.g.: “A force is something, which acts on the body and may change its motion or cause its deformation.”, “It is a physical quantity. If we act on the body by a force, it results in the change of its motion or in its deformation.” Such answers were classified as belonging to the last column 5.

The answers at the level of pseudoconcept (the column 4) were characterized by the knowledge of the attribute “action” however, no information about the link to the superordinate concept (understood as the cause of a change of motion) was there. Examples of such answers: “If the body starts moving with a speed v , there is a force F acting on the body.”, “A force is a certain pressure on an object, which cause its motion.”, “A force is a vector physical quantity. It is a measure of action upon a body.”, “A force is an acting upon a body.”

The answers at the level of complex (the column 3) did not mention the attribute of force, e.g.: “A force is a physical quantity determined by its direction, magnitude and point of application.”, “A force is given by the product $F = m \cdot a$.”

The numerical data in all columns present the percentage of the answers (from the given number of respondents in the column 1) included in the corresponding category and age bracket. The column 1 presents the number of respondents in the specific age bracket. The column 2 present the percentage of the zero answers (the pupils did not answer) and the incorrect or incomprehensible answers, which could not be evaluated as far as the inclusion into the columns 3, 4 and 5 was concerned.

column	1	2	3	4	5
age of respondents	number of respondents	zero/incorrect answer	answer at level of complex	answer at level of pseudoconcept	answer at level of concept
grade 8	315	17,8 %	45,0 %	32,9 %	4,3 %
grade 9	209	28,4 %	25,7 %	44,3 %	1,6 %
grade 11	115	23,5 %	18,3 %	53,9 %	4,3 %
grade 12	187	21,4 %	32,6 %	43,3 %	2,7 %

6. Conclusions

The paper presents a theoretical cognitive construct – the triangular model of the concept structure and the developmental levels of concepts in the external conceptual knowledge systems. The model is not fully verified yet with respect of the huge complexity of a complete problem. Based on this model, the specific method of cognitive analysis and synthesis of concepts has started to develop. This method enables a construction of cognitive models of single external concepts.

The triangular model of concept may be applied to the internal concepts, as well. It describes the Vygotian phases of concept formation, starting with complex, while distinguishing the phase of the lower and higher complex, as well as pseudoconcept. The phases of complex and pseudoconcept were tested in the internal concepts “conductor of the electric current”, “electric current” and “force” of eighth to twelfth grade students. By the author’s opinion, the phases of complex and pseudoconcept are necessary developmental phases in the concept formation. The objectives of school education should be an attainment of phase of the fully developed concept at the end of educational process – at least as far as the key concepts are concerned. However, it was demonstrated that the majority of the graduates of high schools has physical concepts, which are at the level of complex or pseudoconcept.

The triangular model of the concept and the conception of development of external conceptual knowledge systems were used for the analysis of development of the concept “force” and the related knowledge from the ancient philosophy to the modern physics. Besides the first primitive level and the last – formal level corresponding to the theoretical mechanics, two different levels of the concept “force” were distinguished: the Aristotelian (empirical) level corresponding to the conception of force in ancient Aristotle philosophy and the Newtonian (symbolical) level corresponding to the Newton’s conception of force. The tests of structure of the concept “force” of sixth to twelfth grade students demonstrated that thinking of the majority of the high school graduates remains at the ancient – Aristotelian level, at least as far as the concept “force” and related knowledge is concerned. This misconception was found out almost thirty years ago, and it was confirmed by newer and current research. An instruction procedure, which can help to overcome the Aristotelian misconception of force, is presented in the paper.

The theoretical conception of the triangular model of concept, which includes Vygotian phases of concept formation and developmental levels of concept formation, has proven to be an efficient tool for the cognitive modeling of concepts and knowledge within the first phases and transformations of the curricular process. Besides, it may be used in the course of the instructional process in connection with tests of the input and output knowledge concerning the quality of the acquired knowledge.

References

- Adamčíková, V., Tarábek, P. (2000) Concept charts. Vancouver: WEM – World Education Market.
- Adamčíková, V. Tarábek, P. (2007) Didaktická komunikácia v predmetových didaktikách. *Inovácie v škole 2007* Podbanské, Bratislava: Združenie Orava pre demokraciu vo vzdelávaní.
- Anderson, M., T., Spector, M., J. (2000). Integrated and Holistic Perspectives on Learning, Instruction and Technology. Springer, ISBN 0792367057
- Antológia z diel filozofov. (1972) Od Aristotela po Plotína. Bratislava: Pravda
- Bartolo, A., Daumüller, M., Della Sala, S., Goldenberg, G., (2007) Relationship between object-related gestures and the fractionated object knowledge system. *Behavioural Neurology*, Volume 18, Number 3, p. 143 - 147
- Bergeron Corrie. (2007) Instructional design 101. <http://rocky.itasca.net/~corrie/ID101B.pdf>
- Brockmeyer, J., Tarábek, P. (2007). Theoretical Conception of Physics Education (Teoretická koncepcie didaktiky fyziky). *Educational & Didactic Communication 2007*. Bratislava: Educational Publisher Didaktis
- Concept analysis (2007) <http://www.cwu.edu/~streetl/CONCEPTS.html>
- Čáp, J., Mareš, J. (2001). Psychologie pro učitele. Praha: Portál s. r. o.
- Damasio, H., Grabowski, T. J., Tranel, D., Hichwa, R. D., & Damasio, A. R. (1996). A neural basis for lexical retrieval. *Nature*, 380, 499-505.
- Driscoll, M. P. Tessmer, M. (1985). Applications of the concept tree and rational set generator for coordinate concept learning. American Educational Research Association, Chicago.
- Driscoll, M.P. (1989, February). Concept trees and RSGs: New and easy ways to teach and learn concepts. Congreso Internacional De Ciencias De La Educacion, University of Monterrey, Monterrey, Mexico.

- Fenclová, J. (1980) Fyzikální vědomosti našich studentů (Physical knowledge of students). Praha: Academia
- Frege, G. (1892) Über Sinn und Bedeutung, see http://en.wikipedia.org/wiki/On_Sense_and_Reference
- Gregušová, M. (1986). Electricity knowledge of students in high schools. Bratislava: Komenský University
- Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw Hill.; Guilford, J. P. (1988). Some dangers in the structure-of-intellect model. *Educational & Psychological Measurement*, 48, 1–4
- Hejnová, D. (1984). Student's Frameworks of Motion. Prague: Charles University
- Hestenes, D., Wells, M., Swackhammer, G. (1992) Force Concept Inventory. *Physics Teacher* 30, 141
- Kimáková, K. (2008). Úvod do štúdia didaktiky biológie. – kap. 8.3. Pojmové mapy. Košice: Prírodovedecká fakulta, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika.
- Kopásková, J. (2006) Vyučovanie sčítania a odčítania do 10. Interná štúdia, Bratislava: Didaktis
- Linhart, J. (1976). Činnost a poznávání. Praha: Československá akademie věd.
- Mann, G. (1995) Beeline - A Situated, Bounded Conceptual Knowledge System. *Journal of Systems Research and Information Science*, 1995, 7, pp 37-53,
- Mlčúchová, L. (1988). Electricity knowledge of students in secondary and high schools. Bratislava: Komenský University
- Nachtigall, D. (1981). The pre-Newtonian Concept of Motion in the Minds of Students. *Proceedings of Conference Methods of Teaching Physics*. Thailand: Khon Kaen University
- Nakonečný, M (1997) Encyklopedie obecné psychologie. Praha: Academia.
- Půlpán, Z. (1981) Vytváření struktur ve středoškolské fyzice. Hradec Králové: Pedagogická fakulta
- Půlpán, Z. (1988) K problematice sémantizace některých přírodovědných poznatků. Hradec Králové: Pedagogická fakulta.
- Průcha, J. (2002) Moderní pedagogika. Praha: Portál s. r. o.
- Renström, L., Anderson, B., Marton, F. (1990) Students Conception of Matter. *Journal of Educational Psychology*, 82, C.3, p. 555 – 569
- Rieber, R. W., Robinson, D. K. (2004) The Essential Vygotsky. *Child Psychology: Vygotsky's Conception of Psychological Development*. p. 441. Springer
- Sedláková, M. (2004) Vybrané kapitoly z kognitivní psychologie. Mentální reprezentace a mentální modely. Praha: Grada.
- Sharma, S.V., Sharma, K.C. (2007) Concepts of force and frictional force: the influence of preconceptions on learning across different levels. *Physics Education* Vol. 42. Number 5
- Sternberg, R.J. (2002) Kognitivní psychologie. Praha: Portál s. r. o.
- Svoboda, K. (1962) Zlomky předsokratovských myslitelů. Praha: ČSAV
- Tarábek, P. (1985) Formálnosť pochopenia fyzikálnych pojmov u študentov (Formal understanding of student's physical concept). *Proceedings of conference DIDFYZ 85*. Račkova dolina, Nitra: Association of Slovak Physicians.
- Tarábek, P. (1985) The Structure of empirical physics's knowledge and the teaching physics. *Zborník 8. konferencie československých fyzikov*. Bratislava
- Tarábek, P. (1988) Model poznávacieho procesu fyziky a štruktúra fyzikálnych pojmov. V zborníku Analýza poznávacieho procesu v odborových didaktikách prírodných vied a matematiky zo seminára pracovnej skupiny pre obecné otázky odborových didaktík matematiky a prírodovedných predmetov v rámci DÚ ŠPZV IX-10-2/2. Bratislava: ÚÚVU.
- Tarábek, P. (1989) Developmental levels of the natural science knowledge, *Miscellanies of the European Regional Workshop*, Praha: UNESCO.
- Tarábek, P. (2002) Levels of internal concept knowledge system, *Analytical-Synthetic Modelling of Cognitive Structures (volume 2: Didactic communication and educational sciences)*, New York, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2003) Developmental levels of the natural science knowledge. *Formation and Design of Textbook (volume 1)*. London, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2003) External and internal concept knowledge system. *Formation and Design of Textbook (volume 2)*. London, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2004) Concept structure. *Modern Science and Textbook Creation (Vol. 1)*. Frankfurt, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2004) Štruktúry pojmov a poznatkov - aplikácie vo vyučovaní. *Inovácie v škole 2004*. Podbanské, Bratislava: Združenie Orava pre demokraciu vo vzdelávaní.
- Tarábek, P. (2004). Odmaturuj z fyziky. Physics Guide. Brno: Didaktis

- Tarábek, P., Kopečková, S. (2005) Matematika 1 pro 1. ročník ZŠ. Brno: Didaktis
- Tarábek, P. (2005a) Concept networking based on the triangular model of concept's structure. *Modern Science and Textbook Creation (Vol. 2)*. Frankfurt, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2005b) Zmysel školského vzdelávania v spoločnosti so znalostnou ekonomikou - Modelovanie štruktúry pojmov a poznatkov. *Inovácie v škole 2005*. Podbanské, Bratislava: Združenie Orava pre demokraciu vo vzdelávaní.
- Tarábek, P. (2006) Concept levels imagined by triangular model of concept's structure. *Educational and Didactic Communication*. Frankfurt, Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2006) Vývojové úrovne pojmov pri ich formovaní. *Inovácie v škole 2006*. Podbanské, Bratislava: Združenie Orava pre demokraciu vo vzdelávaní.
- Tarábek, P., Záškodný, P. (2006) Didaktická komunikace fyziky a její aplikace. Matematika, fyzika, informatika 16, 3 - 4. Praha: Prometheus.
- Tarábek, P. (2006) Zmaturuj z fyziky. Physics Guide. Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2007a) Vývojové úrovne matematických pojmov pri ich formovaní. *Inovácia v matematickej príprave žiakov, zborník z vedeckej konferencie*. Trnava: Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity.
- Tarábek, P. (2007b) Kognitívne termíny v teórii didaktickej komunikácie prírodných vied. *Educational & Didactic Communication 2007*. Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2007c) Didaktická komunikace fyziky a její struktura. *Educational & Didactic Communication 2007*. Bratislava: Educational Publisher Didaktis.
- Tarábek, P. (2007d) Štruktúra pojmov u detí predškolského veku. Interná štúdia. Bratislava: Didaktis.
- Tarábková, M. (2007) Nemecká gramatika. German Grammar. Bratislava: Educational Publisher Didaktis
- Tarábková, M. (1986) Štúdium pochopenia pojmu „sila“ u žiakov 6. – 8. ročníka základnej školy. Bratislava: Gym.J.Hronca.
- Tessmer, M., Wilson, B., Driscoll, M. (1990). A new model of concept teaching and learning. *Educational technology, research and development*, 38 (1), 45-53.
- The MacTutor History of Mathematics Archive (2007) University of St. Andrews, Scotland, <http://www-history.mcs.ac.uk/>
- Tuomi Ilkka. (1998). Vygotsky in a Team Room: An exploratory study on collective concept formation in electronic environments. Nokia Research Center. P. O. Box 407, FIN-00045 Nokia Group, Finland. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=798712>
- Voight, V. (1981) Úvod do semiotiky. Bratislava: Tatran
- Vygotskij, L.S. (1986). Thought and Language. Cambridge, MA: The MIT Press, ISBN: 9780262720106; Myšlení a řeč. Moskva: Akademia pedagogičeskich nauk, 1956; Praha: SPN, 1970; Praha: Portál, 2004.